



SVEUČILIŠTE U SPLITU
UNIVERSITAS STUDIORUM SPALATENSIS

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
R.Boškovića bb, 21000 SPLIT, www.fesb.hr

Poslijediplomski doktorski studij strojarstva

Ak.god. 2008/09

Kolegij
Mehanika loma

Nastavnik
Srdjan Podrug

Split, 15. srpanj 2009.

U okviru mehanike loma određuju se polja lokalnih naprezanja i deformacija oko vrška pukotine pomoću globalnih parametara, kao što su opterećenje i geometrija strojnog dijela. Principi određivanja polja lokalnih naprezanja i deformacija najčešće se dijele na linearno elastični pristup (en. Linear Elastic Fracture Mechanics – LEFM) i nelinearni pristup, koji se nadalje dijeli na elasto-plastični (eng. Elastic-Plastic Fracture Mechanics - EPFM), viskoelastični i viskoplastični pristup

U ovim će se materijalima dalje razmatrati samo princip linearno elastične mehanike loma, kod koje je nelinearna deformacija materijala ograničena na manje područje oko vrška pukotine.

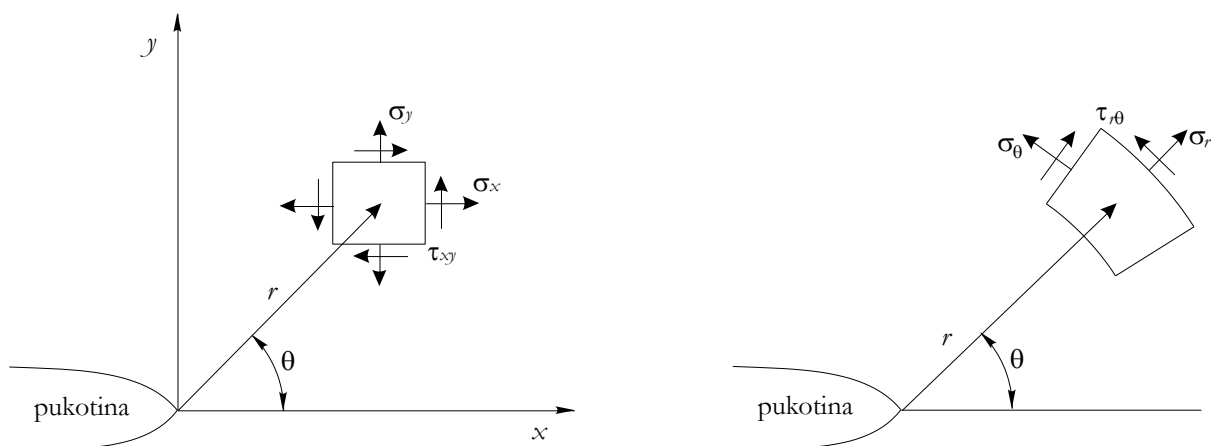
Dat će se teorijske osnove linearno elastične mehanike loma s posebnim osvrtom na izračunavanje faktora intenziteta naprezanja metodom konačnih elemenata. Opisat će se najčešće korišteni kriteriji za određivanja smjera širenja pukotine. Također će se opisati mogućnosti izračunavanja faktora intenziteta naprezanja pri kojem dolazi do zatvaranja pukotine, odnosno do kontakta površina pukotine za vrijeme djelovanja vremenski promjenjivog opterećenja.

1. ANALIZA POLJA NAPREZANJA U BLIZINI VRŠKA PUKOTINE

Ako se postavi polarni koordinatni sustav s ishodištem u vrhu pukotine tada se polje naprezanja linearno elastičnog tijela s pukotinom može opisati izrazom [1]:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta), \quad (1)$$

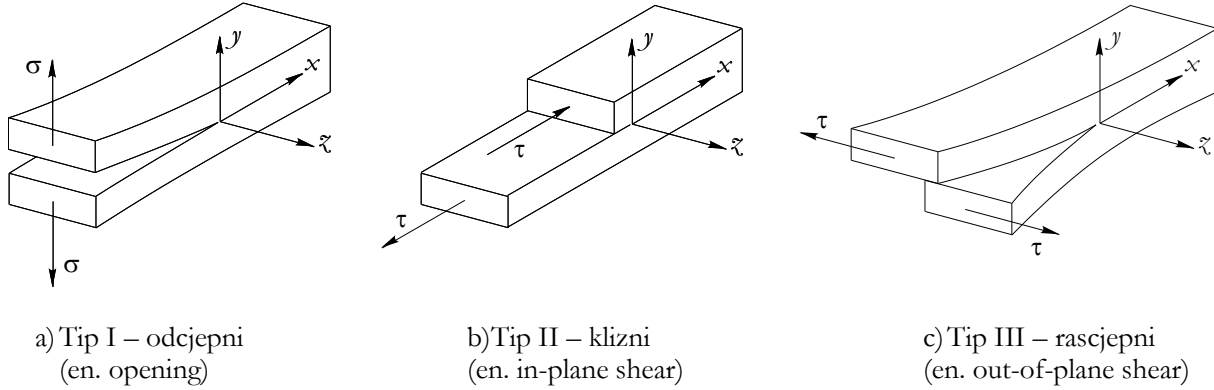
gdje je: σ_{ij} tenzor naprezanja, r i θ definiraju točku u polarnim koordinatama u odnosu na vršak pukotine (slika 1.1), k je konstanta, a f_{ij} i g_{ij} su bezdimenzijske funkcije ovisne o θ .



Slika 1.1 Definicija koordinatnih osi

Dijelovi izraza višeg reda ovise o geometriji. Rješenje za bilo koju geometriju uvijek sadrži izraz proporcionalan $1/\sqrt{r}$. Kada $r \rightarrow 0$ prvi dio izraza (1) teži u beskonačnost, a ostali dijelovi izraza su konstantni ili teže nuli. Dakle, izraz (1) opisuje singularnost napreznja, budući je $r=0$ asimptota napreznja.

Poznata su tri glavna tipa otvaranja pukotine, prikazana na slici 1.2. To su I tip ili odcjepni tip, II tip ili klizni tip i III tip ili rascjepni tip.



Slika 1.2 Tri osnovna tipa opterećenja s pripadajućim tipovima pukotine

Svaki način otvaranja pukotine proizvodi $1/\sqrt{r}$ singularitet u vršku pukotine, a konstanta k i funkcija f_{ij} ovise o načinu otvaranja pukotine

Konstanta k se zamjenjuje s faktorom intenziteta napreznja (FIN) K , gdje je $K = k\sqrt{2\pi}$. Faktoru intenziteta napreznja dodaju se indeksi tako da se naznači način otvaranja pukotine. Sada se polje napreznja oko vrška pukotine za izotropni linearno elastični materijal može opisati slijedećim izrazima:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta), \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta), \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta). \quad (4)$$

U slučaju kad postoji više načina otvaranja pukotine, tada se zbrajanjem dobiva polje napreznja:

$$\sigma_{ij}^{(\text{ukupno})} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (5)$$

Pomoću Westergaardovih funkcija naprezanja može se doći do analitičkog rješenja raspodjele naprezanja oko vrška pukotine:

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] - \left[K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\}, \quad (6)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] + \left[K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\}, \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \left[K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\}. \quad (8)$$

za stanje ravninske deformacije: $\sigma_\kappa = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

U polarnom koordinatnom sustavu stanje naprezanja oko vrška pukotine je:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (9)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad (10)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (11)$$

Prethodni izrazi vrijede u okolini bliskoj vršku pukotine, odnosno u području koje se naziva zonom s dominantnom singularnosti. Izvan te zone naprezanje je dominantno ovisno o geometriji strojnog dijela, odnosno drugom dijelu izraza na desnoj strani jednadžbe (1).

Iz izraza (6) do (11) vidljivo je da faktori intenziteta naprezanja u potpunosti opisuju stanje naprezanja oko vrška pukotine. Ova mogućnost opisivanja stanja oko vrška pukotine samo s jednim parametrom jedna je od najvažnijih značajki mehanike loma.

Pomaci su također u potpunosti opisani faktorom intenziteta naprezanja:

$$u = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad (12)$$

$$v = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad (13)$$

gdje je G modul smicanja, a κ konstanta koja ovisi o stanju naprezanja:

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad - \text{ za ravninsko stanje naprezanja,}$$

$\kappa = 3 - 4\nu$ - za ravninsko stanje deformacije.

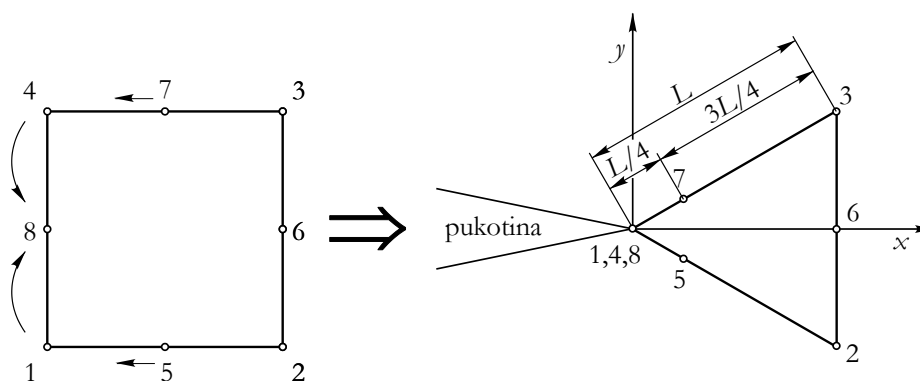
2. FAKTOR INTENZITETA NAPREZANJA

Faktor intenziteta napreznaja je ovisan o duljini i orijentaciji pukotine, geometriji strojnog dijela te raspodjeli opterećenja, i općenito ima oblik:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} Y, \quad (14)$$

gdje je Y faktor oblika, kojim se uzima u obzir utjecaj geometrije elementa, duljine pukotine i tipa opterećenja. Faktor oblika je jednak jedan za pukotinu u beskonačnoj ploči okomitoj na jednolično opterećenje. Analitički i empirijski izrazi za izračunavanje faktora intenziteta napreznaja za uzorke jednostavne geometrije s različitim oblicima pukotina, te različito opterećenih mogu se pronaći u literaturi [2]. Kako strojni dijelovi najčešće nisu jednostavne geometrije, te su najčešće podvrgnuti složenom stanju napreznaja, razvijene su metode izračunavanja faktora intenziteta napreznaja metodom konačnih elemenata.

U početnim studijama izračunavanja faktora intenziteta napreznaja korištenjem metode konačnih elemenata, da bi se riješio problem singularnosti polja napreznaja, koristila se veoma gusta mreža elemenata. Kako je kod elastičnih materijala nemoguće « $1/\sqrt{r}$ singularnost» postići standardnim elementima, razvijeni su hibridni elementi, tj. singularni izoparametarski četvrtinski elementi [3]. Singularni izoparametarski četvrtinski element je dobiven iz izoparametarskog 8-čvornog kvadratnog elementa, na način da se čvorovi 1, 4 i 8 grupiraju u vršku pukotine, a čvorovi sa sredine stranice premještaju na četvrtinu duljine stranice.



a) Izoparametarski 8-čvorni kvadratni element

b) Singularni izoparametarski četvrtinski element

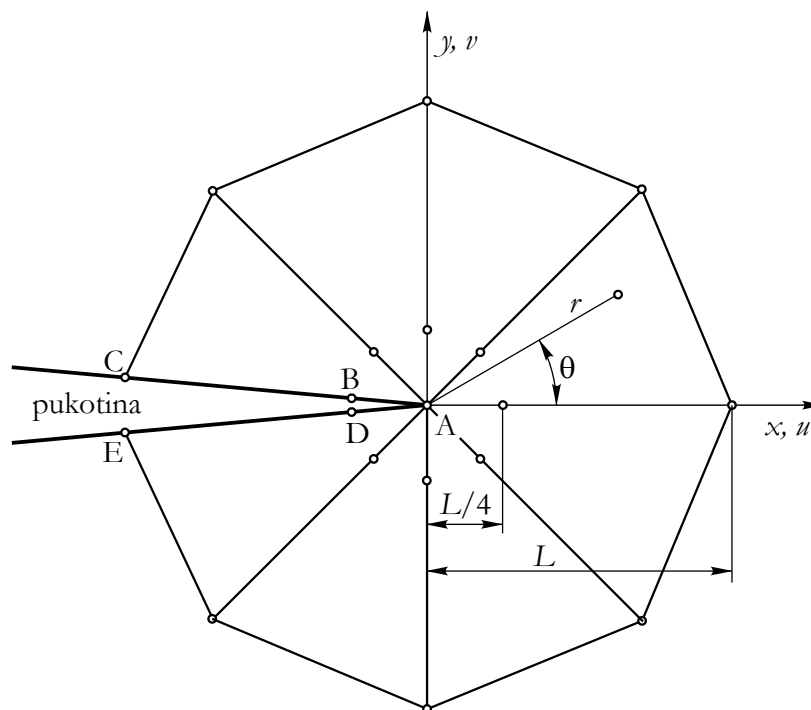
Slika 2.1 Izoparametarski 8-čvorni kvadratni element i singularni izoparametarski četvrtinski element

Postoji niz metoda za izračunavanje faktora intenziteta naprezanja korištenjem metode konačnih elemenata, a najčešće su korištene:

- Metoda korelacija pomaka (en. Displacement Correlation Technique – DCT) [4]
- Faktor oslobođene potencijalne energije dobiven metodom modificiranog integrala zatvaranja pukotine (en. Modified Crack Closure Integral Technique – MCC) [5], [6],
- Metoda J-integrala dobivenog pomoću ekvivalentnog površinskog integrala (en. Equivalent Domain Integral – EDI) [7]

2.1 Metoda korelacija pomaka

U metodi korelacije pomaka se pomaci dobiveni metodom konačnih elemenata izjednačavaju s analitičkim rješenjem izraženim preko faktora intenziteta naprezanja.



Slika 2.2 Izoparametarski singularni elementi oko vrška pukotine

Polje pomaka u može se definirati pomacima čvorova izoparametarskog singularnog četvrtinskog elementa (slika 2.2):

$$u(r, \theta) = u_A + (-3u_A + 4u_B - u_C) \sqrt{\frac{r}{L}} + (2u_A + 2u_C - 4u_B) \frac{r}{L}, \quad (15)$$

$$v(r, \theta) = v_A + (-3v_A + 4v_B - v_C) \sqrt{\frac{r}{L}} + (2v_A + 2v_C - 4v_B) \frac{r}{L}, \quad (16)$$

ovdje je u_A i v_A pomak krutog tijela na x odnosno y pravcuspjerneru. Relativni pomak između dvije točke simetrične u odnosu na x os je:

$$u^*(r, \theta) = u(r, \theta) - u(r, -\theta) \quad (17)$$

$$v^*(r, \theta) = v(r, \theta) - v(r, -\theta). \quad (18)$$

Uvrštavanjem u izraze (15) i (16) dobiva se:

$$u^*(r, \theta) = [4(u_B - u_D) - (u_C - u_E)] \sqrt{\frac{r}{L}} + [2(u_C - u_E) - 4(u_B - u_D)] \frac{r}{L}, \quad (19)$$

$$v^*(r, \theta) = [4(v_B - v_D) - (v_C - v_E)] \sqrt{\frac{r}{L}} + [2(v_C - v_E) - 4(v_B - v_D)] \frac{r}{L}. \quad (20)$$

S druge se strane analitičko rješenje relativnog pomaka za $\theta = 180^\circ$ dobiva iz apsolutnih pomaka (12) i (13), uz izraze (17) i (18), a glasi:

$$u = K_{II} \frac{\kappa + 1}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}, \quad (21)$$

$$v = K_I \frac{\kappa + 1}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}. \quad (22)$$

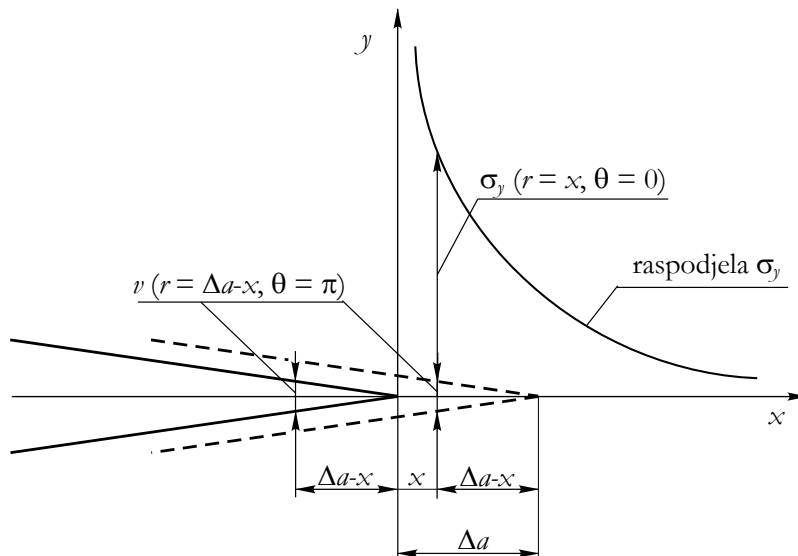
Da bi izrazi (15) i (21), te izrazi (16) i (22) bili jednaki, članovi uz \sqrt{r} moraju biti jednaki, pa se dobivaju faktori intenziteta naprezanja:

$$K_I = \frac{G}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(v_B - v_D) - (v_C - v_E)], \quad (23)$$

$$K_{II} = \frac{G}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(u_B - u_D) - (u_C - u_E)]. \quad (24)$$

2.2 Metoda modificiranog integrala zatvaranja pukotine

Metoda modificiranog zatvaranja pukotine zasnovana je na pretpostavci da ukoliko se pukotina produlji za infinitezimalnu vrijednost Δa , da će na jednakoj udaljenosti od vrška pukotine prije i poslije njena produljenja, pukotine biti jednako otvorene (slika 2.3).



Slika 2.3 Pukotina prije i poslije produljenja (rasta)

Tada je rad potreban za produljenje pukotine za vrijednost Δa , jednak radu potrebnom za zatvaranje pukotine za Δa :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} v(r = \Delta a - x, \theta = \pi) \sigma_y(r = x, \theta = 0) dr. \quad (25)$$

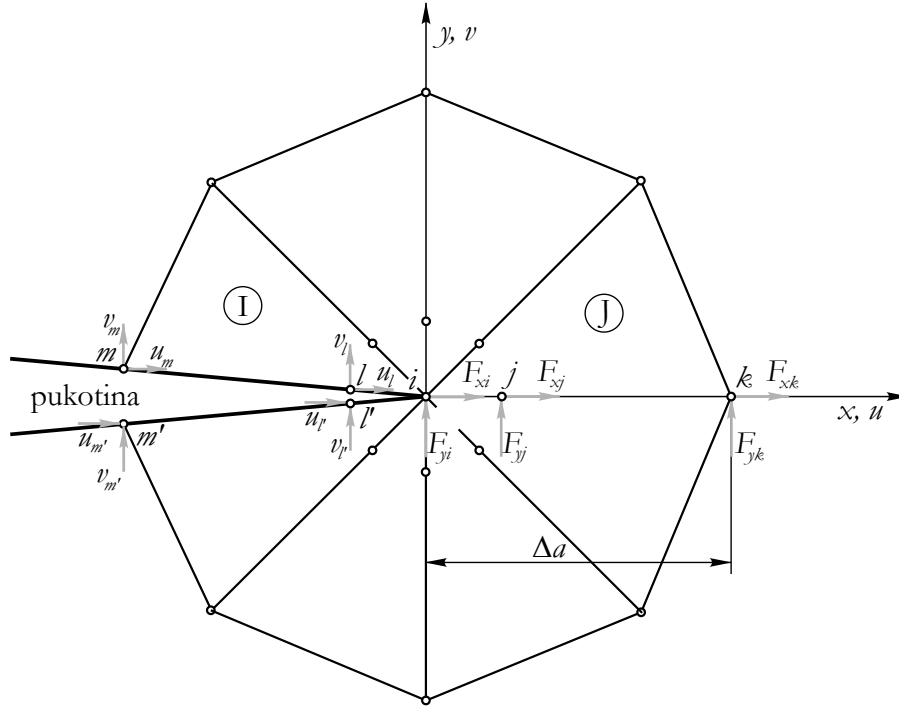
Faktor oslobođene energije je onda jednak:

$$G_I = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} v(r = \Delta a - x, \theta = \pi) \sigma_y(r = x, \theta = 0) dr. \quad (26)$$

Isto tako za tip II opterećenja:

$$G_{II} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} u(r = \Delta a - x, \theta = \pi) \tau_{xy}(r = x, \theta = 0) dr. \quad (27)$$

Problem se najprije rješavao u dva koraka, odnosno s dvije analize metodom konačnih elemenata, jedna prije produljenja i druga nakon produljenja pukotine. Rybicki i Kanninen [8] su prvi riješili problem sa samo jednom analizom metodom konačnih elemenata, koristeći četvrtasti element s četiri čvora. Raju [5] je proširio metodu za nesingularne i singularne elemente bilo kojeg reda.



Slika 2.4 Čvorovi, sile i pomaci u izoparametarskim singularnim elementima oko vrška pukotine

Rad pretpostavljene distribucije naprezanja na pomicanju granica elemenata I i J (25) izjednačava se sa radom sila F_{ji} , F_{yj} i F_{yk} na pomacima v_i , v_j i v_k :

$$\frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} \sigma_y(x) v(x) dx = -\frac{1}{2} (F_{yi} v_i + F_{yj} v_j + F_{yk} v_k) \quad (28)$$

Distribucija naprezanja duž apscise se aproksimira s prva tri člana izraza (1):

$$\sigma_y(x) = \frac{A_1}{\sqrt{x}} + A_2 + A_3 \sqrt{x}. \quad (29)$$

Uvrštavanjem u izraz (28) izraza (29) i funkcije oblika izoparametarskog singularnog četvrtinskog elementa, mogu se izračunati konstante A_1 , A_2 i A_3 . Uvrštavanjem dobivenih konstanti izraženih preko sila u čvorovima u izraz (26) te provođenjem integracije dobiva se izraz za izračunavanje faktora oslobođene energije [6].

Izrazi za izračunavanje faktora oslobođene energije za singularne elemente su dosta komplicirani, a pogotovo se dodatno kompliciraju za slučaj mješovitog tipa opterećenja. Zbog toga se izrazi pojednostavljuju uzimanjem samo prvih dvaju članova izraza (29). Tada se dobiva:

$$G_1 = -\frac{1}{2\Delta a} \left\{ F_{yi} \left[t_{11} (v_m - v_{m'}) + t_{12} (v_l - v_{l'}) \right] + F_{yj} \left[t_{21} (v_m - v_{m'}) + t_{22} (v_l - v_{l'}) \right] \right\}, \quad (30)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2\Delta a} \left\{ F_{zi} \left[t_{11}(u_m - u_{m'}) + t_{12}(u_l - u_{l'}) \right] + F_{xy} \left[t_{21}(u_m - u_{m'}) + t_{22}(u_l - u_{l'}) \right] \right\}, \quad (31)$$

gdje je:

$$t_{11} = 6 - \frac{3\pi}{2}, \quad t_{12} = 6\pi - 20, \quad t_{21} = \frac{1}{2}, \quad t_{22} = 1.$$

U linearno elastičnim uvjetima veza između faktora oslobođene energije i faktora intenziteta naprezanja je:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}. \quad (32)$$

gdje je:

$$E' = E \quad - \text{za ravninsko stanje naprezanja,}$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad - \text{za ravninsko stanje deformacije.}$$

2.3 Metoda J-integrala računalog s ekvivalentnim površinskim integralom

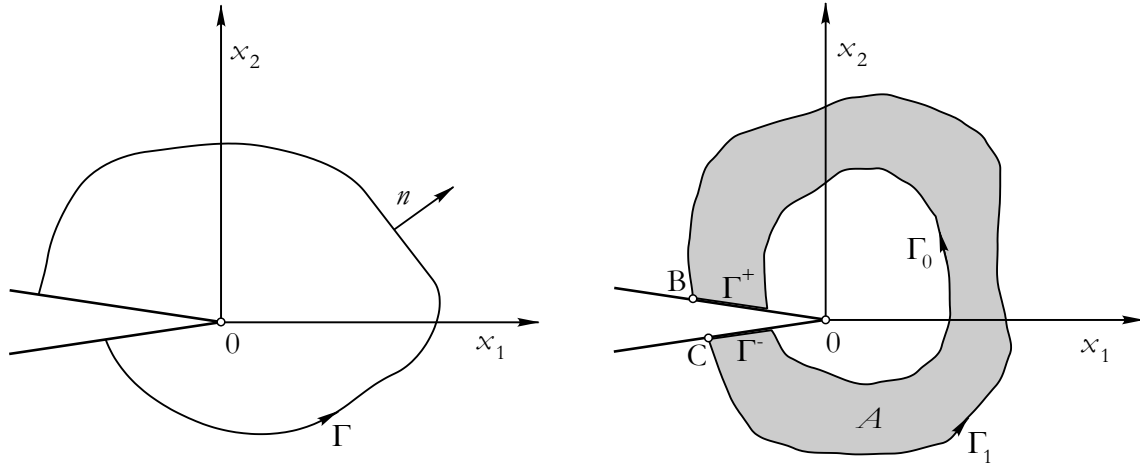
J-integral je proizvoljni (ne ovisi o obliku krivulje) krivuljni integral (slika 2.5a):

$$J_k = \int_{\Gamma} \left(w n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) d\Gamma, \quad k = 1, 2 \quad (33)$$

gdje je w gustoća energije deformiranja:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (34)$$

Krivuljne integrale (33) je nespretno računati metodom konačnih elemenata, pa se integracija duž krivulje zamjenjuje integracijom po površini. Taj se alternativni pristup izračunavanja J-integrala naziva metoda ekvivalentnog površinskog integrala [7].



a) Koordinatni sustav i krivulja Γ oko vrška pukotine b) Površina A omeđena krivuljama Γ_0 i Γ_1

Slika 2.5 Krivulje oko vrška pukotine

Izraz (33) modificira se množenjem s težinskom funkcijom q koja ima vrijednost jednaku jedan na unutarnjoj konturi Γ_0 , a nula na vanjskoj konturi Γ_1 (slika 2.5b):

$$J_k = \int_{\Gamma_0 + \Gamma_1} \left(n m_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) q d\Gamma. \quad (35)$$

Gornji se izraz uz pogodne transformacije može pisati:

$$J_k = - \int_{\Gamma_0 + \Gamma_0 + \Gamma^+ + \Gamma^-} \left(n m_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) q d\Gamma + (J_k)_{\text{linijski}}. \quad (36)$$

U prethodnom je izrazu prvi izraz na desnoj strani integral duž zatvorene konture $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma^+ + \Gamma^-$, koja ne uključuje vršak pukotine, a drugi izraz s desne strane predstavlja integrale na rubovima pukotine duž linija ($\overline{B0}$ i $\overline{C0}$).

Integral duž zatvorene konture iz izraza (36) primjenom Stokesova teorema može se transformirati u integral iznad površine A :

$$J_k = - \int_A \left(w \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right) dA - \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) q dA + (J_k)_{\overline{A0+B0}}. \quad (37)$$

Za linearno elastični materijal drugi izraz na desnoj strani prethodnog izraza je jednak nuli. Također J_1 za linearno elastični materijal je ekvivalentan faktoru oslobođene energije izračunatom pomoću metode virtualnog produljenja pukotine [9].

Linijski integrali $(J_1)_{\overline{B_0+C_0}}$ kada nisu opterećeni rubovi pukotine su jednaki nuli. Linijski integrali $(J_2)_{\overline{B_0+C_0}}$ su jednaki nuli, u slučaju kada nema opterećenja na rubovima pukotine, samo kada je opterećenje tipa I ili tipa II, u slučaju opterećenja mješovitog tipa $(J_2)_{\overline{B_0+C_0}}$ su različiti od nule, jer u tom slučaju uz singularna naprezanja oko vrška pukotine postoje i ona nesingularna. Postojanje linijskog integrala različitog od nule poništava prednosti transformacije krivuljnog u površinski integral.

Računanje se linijskih integrala može izbjeći provođenjem metode dekompozicije [7]. Ovim se pristupom polja pomaka i naprezanja rastavljaju na simetrični (tip I) i antisimetrični (tip II) dio. Pomoću tako rastavljenih pomaka i naprezanja mogu se dobiti dva simetrična integrala J_{S1} i J_{S2} , te dva antisimetrična integrala J_{AS1} i J_{AS2} . Integrali J_{S2} i J_{AS2} su jednaki nuli (produkt singularnog i nesingularnog naprezanja za rastavljeno simetrično i antisimetrično polje naprezanja je jednak nuli [75]), pa je onda za linearno elastični materijal, te uz uvjet da nema opterećenja na rubovima pukotine:

$$J_I = J_{S1} = - \int_A \left(w(u_i^I) \frac{\partial q}{\partial x_1} - \sigma_{ij}(u_i^I) \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right) dA, \quad (38)$$

$$J_{II} = J_{AS1} = - \int_A \left(w(u_i^{II}) \frac{\partial q}{\partial x_1} - \sigma_{ij}(u_i^{II}) \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right) dA. \quad (39)$$

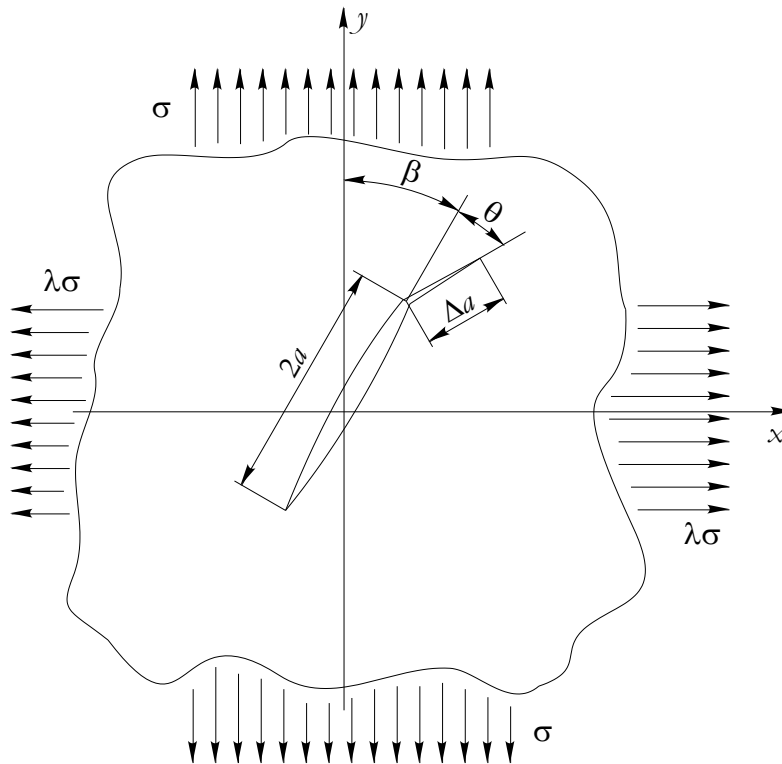
Kako je za linearno elastični materijal J integral identičan faktoru oslobođene energije, onda se uz pomoć izraza (32) mogu dobiti faktori intenziteta naprezanja.

Metodom konačnih elemenata integrali (38) i (39) se rješavaju tako da se provodi integracija na elementima odabranim da predstavljaju površinu A . Odabrana površina je najčešće rozeta trokutastih izoparametarskih singularnih elemenata (slika 2.2).

3. SMJER ŠIRENJA PUKOTINE

Smjer širenja pukotine ovisi o stanju naprezanja u blizini vrška pukotine. Razvijeno je niz kriterija za predviđanje smjera širenja pukotine u polju naprezanja mješovitog tipa (kombinacija tipa I i tipa II opterećenja) [10], [11]. Većina kriterija za predviđanje smjera širenja pukotine prvotno je razvijena za statičko opterećenje. Kako ne postoje kriteriji razvijeni posebno za promjenjivo opterećenje, te iako postoje značajne razlike u smjerovima širenja pukotine kod statičkog i promjenjivog opterećenja [12], to se statički kriteriji koriste za predviđanje širenja pukotine i kod promjenjivog opterećenja.

Problem je predstavljen slikom 3.8, odnosno pločom s pukotinom nagnutom pod kutom β u odnosu na smjer nominalnog naprezanja σ .



Slika 3.1 Problem pukotine pod kutom β u odnosu na smjer nominalnog naprezanja

Najčešće korišteni kriteriji su: kriterij maksimalnog cirkularnog naprezanja, kriterij minimuma gustoće energije deformiranja i kriterij maksimuma faktora oslobođene energije.

3.1 Kriterij maksimalnog cirkularnog naprezanja (MCN-kriterij)

Jedan od prvih pokušaja predviđanja smjera širenja pukotine u slučaju kombiniranog opterećenja tipovima I i II bio je onaj Erdogana i Siha [13]. Oni su istraživali širenje pukotine u ploči iz krhkog materijala, te su predložili kriterij po kojem je pravac širenja pukotine okomit na pravac maksimalnog cirkularnog naprezanja.

Matematički se ovaj kriterij može pisati:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta}}{\partial \theta^2} < 0. \quad (40)$$

Primjenom MCN kriterija na izraz (9) dobiva se:

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \frac{K_I}{K_{II}} \tan \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad (41)$$

$$-\frac{3}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{K_I} \left(\sin^3 \frac{\theta}{2} - \frac{7}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) \right] < 0. \quad (42)$$

Rješavanjem izraza izračunava se kut širenja pukotine:

$$\theta = 2 \arctan \left[\frac{\mu \pm \frac{1}{4} \sqrt{\mu^2 + 8}}{4} \right] \quad (43)$$

gdje je $\mu = K_I/K_{II}$ omjer faktora intenziteta naprezanja.

3.2 Kriterij minimuma gustoće energije deformiranja (S-kriterij)

Prema kriteriju minimuma gustoće energije deformiranja [82], pravac širenja pukotine prolazi kroz točku na kružnici koja je opisana oko vrška pukotine, a u kojoj je energija deformiranja minimalna.

Matematički se ovaj kriterij može pisati:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 \quad (44)$$

gdje je: S faktor gustoće energije deformiranja, definiran izrazom:

$$S = r_0 \frac{dW}{dV}$$

gdje je dW/dV funkcija gustoće energije deformiranja po jedinici volumena, a r_0 udaljenost od vrška pukotine. Korištenjem se izraza koji opisuju polje naprezanja (6) do (8) može dobiti funkcija gustoće energije deformiranja po jedinici volumena, čijim se uvrštavanjem u prethodni izraz dobiva faktor gustoće energije deformiranja:

$$S = a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \quad (45)$$

gdje su faktori a_{ij} funkcije kuta θ :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{16G\pi} [(1 + \cos\theta)(\kappa - \cos\theta)] , \\
a_{12} &= \frac{1}{16G\pi} \sin\theta [2\cos\theta - (\kappa - 1)] , \\
a_{13} &= \frac{1}{16G\pi} [(\kappa + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)] .
\end{aligned} \tag{46}$$

Primjenom S kriterija na izraz (45) dobiva se:

$$\begin{aligned}
2\mu(1 + \kappa) \tan^4 \frac{\theta}{2} + [2\kappa(1 - \mu^2) - 2\mu^2 + 10] \tan^3 \frac{\theta}{2} - 24\mu \tan^2 \frac{\theta}{2} + \\
+ [2\kappa(1 - \mu^2) + 6\mu^2 - 14] \tan \frac{\theta}{2} + 2(3 - \kappa)\mu = 0,
\end{aligned} \tag{47}$$

$$2\mu(\kappa - 1) \sin\theta - 8\mu \sin 2\theta + (\kappa - 1)(1 - \mu^2) \cos\theta + 2(\mu^2 - 3) \cos 2\theta > 0. \tag{48}$$

3.3 Kriterij maksimuma faktora oslobođene energije (G-kriterij)

Analizom utjecaja malog virtualnog produljenja pukotine [15] predložen je kriterij prema kojemu je pravac širenja pukotine u smjeru maksimuma faktora oslobođene energije.

Matematički se ovaj kriterij može pisati:

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} < 0. \tag{49}$$

Irwin [16] je definirao faktor oslobođene energije kao mjeru energije dostupne za produljenje pukotine. Za linearno elastične materijale u mješovitom polju naprežanja, ukoliko je produljenje pukotine u ravnini originalne pukotine, ovisnost faktora oslobođene energije i faktora intenziteta naprežanja se može opisati izrazom:

$$G = G_I + G_{II} = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'}. \tag{50}$$

U stvarnosti se ravnina produljenja pukotine u mješovitom polju naprežanja neće podudarati s ravninom originalne pukotine, te je samim tim izraz (50) pogrešan. Međutim, ukoliko se faktori intenziteta naprežanja u izrazu (50) shvate kao faktori intenziteta naprežanja infinitezimalno, pod kutom θ (slika 3.1) produljene pukotine, tada izraz (50) vrijedi i glasi:

$$G = \frac{(K_I^*)^2}{E'} + \frac{(K_{II}^*)^2}{E'}, \tag{51}$$

gdje su K_I^* i K_{II}^* lokalni faktor intenziteta naprezanja u vršku infinitezimalno produljene pukotine, koji se razlikuju od nominalnih K_I i K_{II} . Prema [85] K_I^* i K_{II}^* se mogu računati iz izraza:

$$K_I^* = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_\theta \sqrt{2\pi r} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (52)$$

$$K_{II}^* = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{r\theta} \sqrt{2\pi r} = \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (53)$$

Faktor intenziteta naprezanja za infinitezimalno produljenu pukotinu ima maksimalnu vrijednost kada je:

$$K_I^* \frac{\partial K_I^*}{\partial \theta} + K_{II}^* \frac{\partial K_{II}^*}{\partial \theta} = 0. \quad (54)$$

Kako je:

$$\frac{\partial K_I^*}{\partial \theta} = -\frac{3}{2} K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \equiv -\frac{3}{2} K_{II}^*. \quad (55)$$

Proizlazi da će izraz (54) biti zadovoljen kada je $K_{II}^* = 0$ (odnosno $\frac{dK_I^*}{d\theta} = 0$). Pošto je:

$$\frac{\partial K_I^*}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}$$

proizlazi da je kriterij maksimuma faktora oslobođene energije, ukoliko se lokalni faktori računaju prema izrazima (52) i (53) identičan kriteriju maksimalnog cirkularnog naprezanja. Ovakav pristup prihvaćen je i u [1] i u [18].

Prema [14] i [19] K_I^* i K_{II}^* se računaju iz izraza:

$$K_I^* = \frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \left(\frac{\pi - \theta}{\pi + \theta} \right)^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(K_I \cos \theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right), \quad (56)$$

$$K_{II}^* = \frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \left(\frac{\pi - \theta}{\pi + \theta} \right)^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(K_{II} \cos \theta - \frac{1}{2} K_I \sin \theta \right). \quad (57)$$

Uvrštavanjem prethodnih izraza u (51) i primjenom G-kriterija (49) može se također izračunati kut pod kojim će doći do produljenja pukotine.

Kao točniji postupak izračunavanja lokalnih faktora intenziteta naprezanja prema [88] može se usvojiti postupak dan u [15], dok prema [21] oba postupka imaju zadovoljavajuću točnost.

Uz ova dva postupka izračunavanja lokalnih faktora intenziteta napreznja postoje i još neki, prvenstveno numerički postupci prema kojima se lokalni faktori računaju različitim polinomnim aproksimacijama [20].

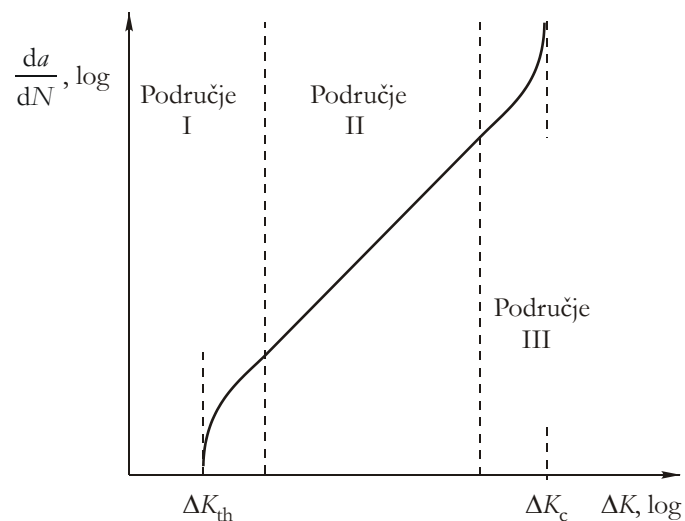
4. BRZINA ŠIRENJA PUKOTINE

Kako je ranije kazano, ukoliko je plastična zona ispred vrška pukotine relativno mala u odnosu na duljinu pukotine, stanje oko vrška pukotine može se opisati samo s jednim parametrom - faktorom intenziteta napreznja. Primjena mehanike loma u izračunavanju brzine širenja pukotine zasnovana je na principu sličnosti. Prema principu sličnosti dvije pukotine opterećene promjenjivim opterećenjem, s ciklusom jednakog konstantnog raspona faktora intenziteta napreznja, imaju jednako polje napreznja i deformacije oko vrška pukotine, a iz toga proizlazi da će i brzina širenja tih dviju pukotina biti jednaka. Dakle, porast duljine pukotine po ciklusu je funkcija raspona faktora intenziteta napreznja

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R) \quad (58)$$

gdje je $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$, a $R = K_{\min}/K_{\max}$.

Na slici 4.1 dan je shematski log-log dijagram ovisnosti porasta duljine pukotine po ciklusu o rasponu faktora intenziteta napreznja. Dijagram prikazuje tipičnu krivulju rasta pukotine u metalima.



Slika 4.1 Tipična krivulja rasta pukotine u metalima

Uočljivo je da je širenje pukotine na početku ubrzano (područje I), zatim prelazi u fazu stabilnog rasta (područje II), da bi konačno prešlo u fazu kritičnog širenja pukotine (područje III).

U području I brzina širenja pukotine teži nuli kako se raspon faktora intenziteta napreznja približava pragu širenja pukotine:

$$\Delta K_{th} = K_{th,max} - K_{th,min} = \Delta\sigma\sqrt{\pi a_{th}}Y \quad (59)$$

gdje je a_{th} duljina začete pukotine. Smatralo se da je prag širenja pukotine konstanta materijala, ali su istraživanja pokazala da ovisi i o koeficijentu asimetrije ciklusa, preopterećenju, temperaturi i uvjetima okoline [22]. Broj parametara koji utječu na prag širenja pukotine može se smanjiti definiranjem efektivnog praga širenja pukotine:

$$\Delta K_{th,eff} = K_{th,max} - K_{cl} \quad (60)$$

gdje je K_{cl} faktor intenziteta napreznja pri kojem dolazi do zatvaranja pukotine (poglavlje 3.5).

U području II pukotina raste linearno u log-log dijagramu, pa se može opisati jednadžbom:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \quad (61)$$

gdje su C i m konstante materijala koje se određuju eksperimentalno. Ova zakonitost poznata je kao Parisov zakon. Usporedbom prethodnih dvaju izraza (58) i (61) uočava se da prema Parisovu zakonu brzina širenja pukotine ne ovisi o koeficijentu asimetrije ciklusa R .

U području III pukotina ubrzano raste kako se raspon faktora intenziteta napreznja približava ΔK_C :

$$\Delta K_C = K_{IC} - K_{C,min} = \Delta\sigma\sqrt{\pi a_C}Y \quad (62)$$

gdje je a_C kritična duljina pukotine, a K_{IC} lomna žilavost.

Kako Parisov zakon vrijedi samo u području II pokušavalo se pronaći jednadžbe koje bi opisivale rast pukotine i u drugim područjima rasta. Jedna od takvih je Formanova jednadžba koja opisuje rast pukotine u područjima II i III:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_{IC} - \Delta K} \quad (63)$$

Klesnil i Lucas modificirali su Parisov zakon uzimajući u obzir prag širenja pukotine, te tako dobili jednadžbu rasta pukotine koja vrijedi u područjima I i II:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K^m - \Delta K_{th}^m) \quad (64)$$

McEvily je razvio izraz koji vrijedi za čitavu krivulju rasta pukotine, i koji je za razliku od prethodnih jednadžbi, koje su dobivene empirijski, zasnovan na jednostavnom fizikalnom modelu:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_{IC} - K_{max}} \right). \quad (65)$$

Iz svih ovih jednadžbi (61), (63), (64) i (65) integriranjem može se dobiti vrijeme potrebno za rast pukotine od neke proizvoljne do kritične duljine. Također svi navedeni izrazi vrijede u slučaju opterećenja tipa I.

Ispitivanjem opterećenjem mješovitog tipa (tip I i tip II) [22] uočeno je da i mali raspon faktora intenziteta naprežanja tipa II značajno povećava brzinu širenja pukotine. Zbog toga su razvijeni modeli koji uzimaju u obzir i doprinos opterećenja tipa II, najčešće korištenjem ekvivalentnog faktora intenziteta naprežanja u Parisovoj jednadžbi (61):

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K_{eq})^m. \quad (66)$$

Ideja korištenja ekvivalentnog faktora intenziteta naprežanja je posebno privlačna jer je većina podataka o materijalima podvrgnutih promjenjivom opterećenju dobivena ispitivanjima opterećenjima konstantne amplitude tipa I, te bi bilo od velike važnosti kad bi se ti podaci mogli koristiti u konstruiranju s obzirom na zamor i u slučaju opterećenja mješovitog tipa.

Za određivanje ekvivalentnog faktora intenziteta naprežanja može se koristiti kriterij maksimalnog cirkularnog naprežanja, te je u tom slučaju iz izraza (9), odnosno izraza (52) [23]:

$$\Delta K_{eq} = \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \left(\Delta K_I \cos \frac{\theta_0}{2} - 3 \Delta K_{II} \sin \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (67)$$

gdje je θ_0 smjer širenja pukotine dobiven iz MCN-kriterija (43).

Tanaka [24] je razvio model zasnovan na pretpostavci da plastične deformacije zbog promjenjivog vlačnog naprežanja ne utječu na plastične deformacije zbog promjenjivog smičnog naprežanja i obrnuto, te da je rezultirajuće polje pomaka zbroj pomaka uslijed obaju tipova opterećenja:

$$\Delta K_{eq} = \sqrt[4]{\Delta K_I^4 + 8 \Delta K_{II}^4}. \quad (68)$$

Mješoviti tip opterećenja se osim ekvivalentnim faktorom intenziteta naprežanja može uzeti u obzir i pomoću faktora gustoće energije deformiranja, pa se u tom slučaju modificira Parisova jednadžba i glasi [25]:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta S)^n \quad (69)$$

gdje je:

$$\Delta S = 2 \left[a_{11}(\theta_0) \Delta K_I \bar{K}_I + a_{12}(\theta_0) (\Delta K_I \bar{K}_{II} + \Delta K_{II} \bar{K}_I) + a_{22}(\theta_0) \Delta K_{II} \bar{K}_{II} \right] \quad (70)$$

gdje je θ_0 smjer širenja pukotine dobiven primjenom S-kriterija (47), faktori a_{11} , a_{12} , a_{22} su dobiveni uvrštenjem kuta θ_0 u izraze (46), ΔK_I i ΔK_{II} su rasponi FIN-a, a \bar{K}_I i \bar{K}_{II} su srednje vrijednosti FIN-a.

U [26] je provedena usporedba eksperimentalno dobivenih vjekova trajanja s vjekovima trajanja do pojave kritične pukotine dobivenih ekvivalentnim faktorom intenziteta naprezanja (67) i faktorom gustoće energije deformiranja (70). Ustanovljeno je da izraz (67) daje najbolje podudaranje s eksperimentalnim podacima za slučajeve mješovitog tipa opterećenja s dominantnim opterećenjem tipa I.

Osim ovih postoji i niz drugih faktora čiji se rezime može pronaći u [10], a u novije vrijeme razvijen je i faktor akumulirane energije elastične deformacije [27].

5. ZATVARANJE-OTVARANJE PUKOTINE

Kontakt između površina pukotine za vrijeme djelovanja vremenski promjenjivog opterećenja naziva se zatvaranje pukotine.

Fenomen zatvaranja pukotine opće je prihvaćen mehanizam koji presudno utječe na niz značajki koje određuju ponašanje pukotina, kao što su, koeficijent asimetrije ciklusa opterećenja, vremenski promjenjivo opterećenje promjenjive amplitude, fenomen kratkih pukotina, mikrostruktura, okoliš i prag širenja pukotine [28].

Tri najznačajnija mehanizma zatvaranja pukotine prikazana su na slici 5.1 [29].

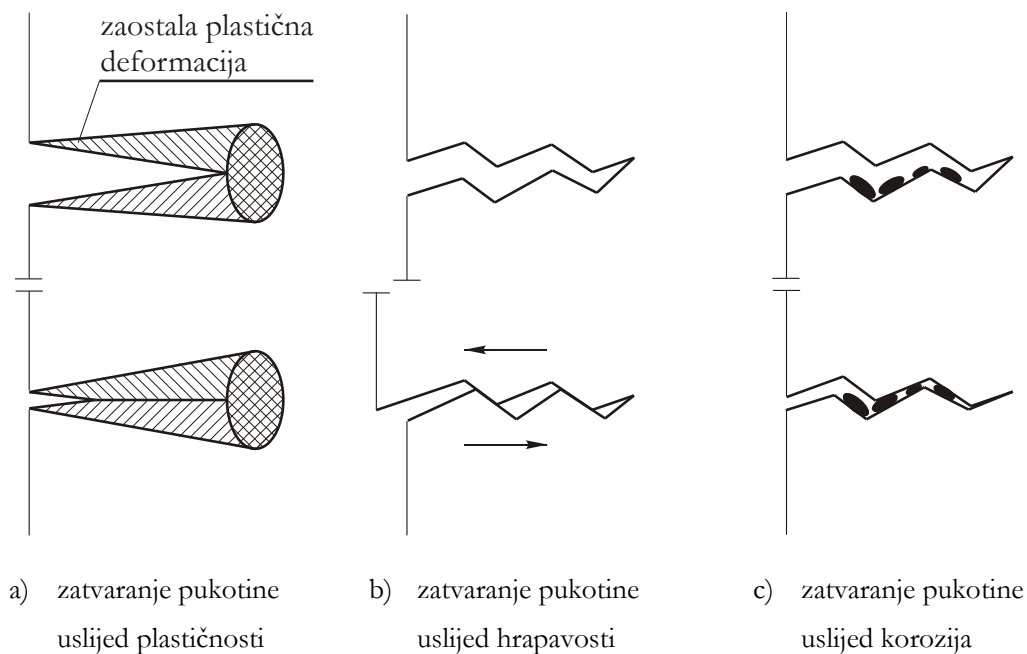
Zatvaranje pukotine uslijed plastičnosti (en. plasticity induced crack closure) nastaje uslijed zaostalih plastičnih deformacija u materijalu iza propagirajuće pukotine (slika 5.1a). Ovu je činjenicu prvi uočio 1968. godine Elber [30] i od tada je ovaj fenomen predmet mnogobrojnih istraživanja, kojima je predloženo niz analitičkih i numeričkih rješenja. Teoretskim modelom zatvaranja pukotine uslijed plastičnosti Budianskyja i Hutchinsona [31] dobivene su funkcionalne ovisnosti zaostalih plastičnih deformacija i CTOD (en. crack tip opening displacement) o opterećenju. Kako se ovim pristupom nije mogao opisati utjecaj povijesti naprezanja intenzivno su se započeli razvijati numerički modeli u kojima se područje zaostale plastičnosti prikazuje tankim slojevima idealno

plastičnog materijala (en. strip yield model) [32], [33]. U najnovije se vrijeme do rješenja problema zatvaranja pukotine pokušava doći metodom konačnih elemenata [34].

Zatvaranje pukotine uslijed hrapavosti i zatvaranje pukotine uslijed korozije su mehanizmi koji su dominantni u području uz prag širenja pukotine te im utjecaj slabi s rastom faktora intenziteta naprezanja, odnosno povećavanjem plastične zone oko vrška pukotine.

Zatvaranje pukotine uslijed hrapavosti uzrokovano je mikrostrukturom materijala. Naime, i kod pukotina koje globalno gledajući rastu djelovanjem opterećenja tipa I, heterogenosti na mikrostrukturnom nivou mogu uzrokovati mješovito stanje naprezanja oko vrška pukotine. Na slici 5.1b prikazan je odmak vrška pukotine od ravnine simetrije, te uslijed toga dolazi do utjecaja opterećenja tipa II i pomicanja površina pukotine koje uzrokuje njeno zatvaranje. Kod materijala krupno zrnate strukture izraženija je pojava zatvaranja pukotine uslijed hrapavosti.

Zatvaranje pukotine uslijed korozije posebno je izraženo u agresivnom okolišu, a nastaje kad čestice oksida ostanu uklinjene između površina pukotine (slika 5.1c).



Slika 5.1 Dominantni mehanizmi zatvaranja pukotine [29]

Zatvaranje pukotine, ma koji joj bio uzrok, utječe na raspon faktora intenziteta naprezanja oko vrška pukotine, te samim tim i na širenje pukotine. Dio ciklusa opterećenja koji uzrokuje oštećenje smanjuje se sa zatvaranjem pukotine, a to smanjenje se uzima u obzir efektivnim faktorom intenziteta naprezanja

5.1 Efektivni faktor intenziteta naprezanja

Efektivni je faktor intenziteta naprezanja onaj dio ciklusa opterećenja za koji je pukotina potpuno otvorena, a određuje se iz izraza:

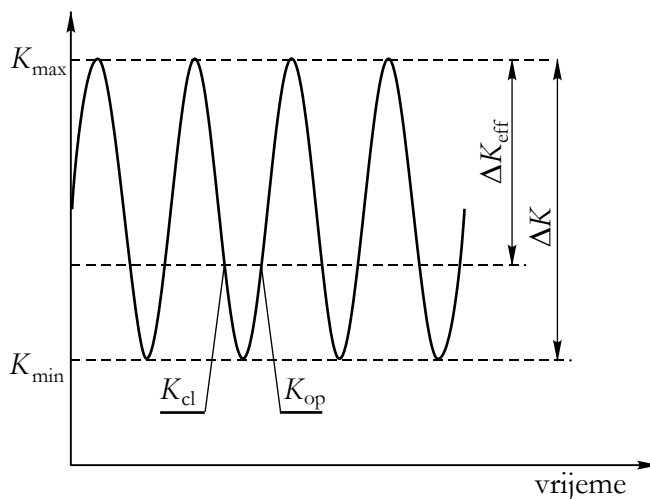
$$\begin{aligned} \Delta K_{\text{eff}} &= K_{\text{max}} - K_{\text{cl}} \quad \text{za } K_{\text{min}} \leq K_{\text{cl}} , \\ \Delta K_{\text{eff}} &= K_{\text{max}} - K_{\text{min}} \quad \text{za } K_{\text{min}} > K_{\text{cl}} , \end{aligned} \quad (71)$$

gdje je K_{cl} maksimalni faktor intenziteta naprezanja pri kojem su površine pukotine spojene, i ostaju spojene za vrijeme faze rasterećenja. Ponekad se FIN zatvaranja (K_{cl}) u izrazu (71) zamjenjuje s FIN otvaranja (K_{op}) definiranim kao minimalni faktor intenziteta naprezanja pri kojem je pukotina u potpunosti otvorena, i ostaje otvorena za vrijeme faze opterećenja. K_{cl} i K_{op} su obično istog reda veličine, ali nisu nužno i jednaki kao što su prikazani na slici 5.2.

Uz efektivni faktor intenziteta naprezanja često se zatvaranje pukotine opisuje i parametrom koji se naziva omjer zatvaranja:

$$U = \frac{\Delta K_{\text{eff}}}{\Delta K} = \frac{K_{\text{max}} - K_{\text{cl}}}{K_{\text{max}} - K_{\text{min}}} . \quad (72)$$

Ovaj omjer teži jedinici za pukotine kod kojih nema zatvaranja, odnosno teži nuli ukoliko je pukotina zatvorena duž cjelokupnog ciklusa opterećenja.



Slika 5.2 Definicija efektivnog faktora intenziteta naprezanja

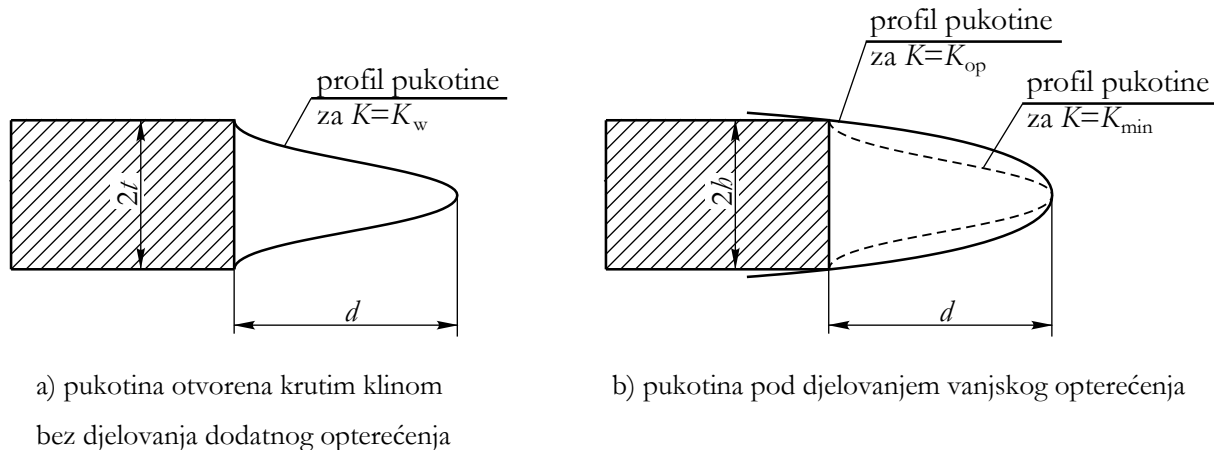
Kako se pukotina ne može širiti dok je zatvorena, efektivnim faktorom intenziteta naprezanja se modificira Parisova jednadžba (61):

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K_{\text{eff}})^m. \quad (73)$$

Upotrebom ovako definiranog efektivnog faktora intenziteta naprezanja eksperimentalni podaci rasta pukotine za različite koeficijente asimetrije ciklusa opterećenja se stapaju u jednu krivulju.

Najnovija istraživanja uvode novi koncept djelomičnog zatvaranja pukotine (en. partial crack closure) kod kojeg značajan utjecaj na oštećenje uslijed zamora ima i opterećenje za koje je faktor intenziteta naprezanja ispod FIN-a otvaranja. Zatvaranje pukotine, odnosno kontakt njenih površina samo djelomično zaštićuje vršak pukotine od utjecaja cikličkog opterećenja, jer do zatvaranja ne dolazi u vršku pukotine, nego na maloj udaljenosti d iza vrška pukotine. Ova pojava je pogotovo izražena u blizini praga širenja pukotine, odnosno u području gdje dominantnu ulogu imaju zatvaranje pukotine uslijed hrapavosti i korozije [35]

U [36] djelomično zatvaranje pukotine je modelirano krutim klinom debljine $2t$ umetnutim u pukotinu na udaljenosti d od vrška pukotine (slika 5.3a). Djelomično zatvaranje započinje kada površine pukotine dotaknu klin (za K_{cl}), a daljnje smanjenje opterećenja zašiljuje vršak pukotine. Promjena geometrije vrška pukotine uzrokuje porast deformacije ispred vrška pukotine.



Slika 5.3 Shematski prikaz koncepta djelomičnog zatvaranja pukotine

Faktor intenziteta naprezanja zbog umetanja klina, a bez djelovanja dodatnog opterećenja je:

$$K_{\text{klin}} = \frac{Et}{\sqrt{2\pi d}}. \quad (74)$$

S druge strane FIN zatvaranja se dobiva iz izraza (22) za $v = b$, $r = d$ i ravninsko stanje naprezanja:

$$K_I = \frac{Eb}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2d}}. \quad (75)$$

Kada je $b = t$ dolazi do kontakta površine pukotine i klina, odnosno do djelomičnog zatvaranja pukotine. To znači da je $K_I = K_{cl}$, kada je $b = t$, i iz jednadžbi (74) i (75) proizlazi:

$$\frac{K_{klin}}{K_{cl}} = \frac{2}{\pi}. \quad (76)$$

Na slici 5.3b prikazana je promjena geometrije vrška pukotine za vrijednosti faktora intenziteta naprezanja koje su manje od K_{cl} . Kao aproksimacija profila pukotine kod opterećenja jednakog nuli može se uzeti profil pukotine s umetnutim klinom bez djelovanja dodatnog opterećenja, prikazan isprekidanom linijom na slici 5.3b. Dakle, K_{cl} se može smatrati gornjom, a K_{klina} donjom granicom za izračunavanje efektivnog faktora intenziteta naprezanja:

$$(K_{max} - K_{cl}) \leq \Delta K_{eff} \leq \left(K_{max} - \frac{2}{\pi} K_{cl} \right), \quad (77)$$

ili kada je $(2/\pi)K_{cl} \leq K_{min}$:

$$(K_{max} - K_{cl}) \leq \Delta K_{eff} \leq (K_{max} - K_{min}). \quad (78)$$

Dakle, prema konceptu djelomičnog zatvaranja pukotine efektivni faktor intenziteta naprezanja ima vrijednost koja se može kretati unutar navedenih granica. U [36] se kao aproksimacija, za slučaj $K_{min} = 0$ predlaže izraz:

$$\Delta K_{eff} = \Delta K_{2/PI0} = K_{max} - \frac{2}{\pi} K_{cl} \quad (79)$$

odnosno, za $K_{min} > 0$:

$$\Delta K_{eff} = \Delta K_{2/PI} = K_{max} - \frac{2}{\pi} K_{cl} - \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) K_{min}. \quad (80)$$

Usporedbom ovih izraza može se uočiti da je $\Delta K_{2/PI0} > \Delta K_{2/PI}$ za $K_{cl} > K_{min} > 0$, odnosno da je $\Delta K_{2/PI0} = \Delta K_{2/PI}$ za $K_{min} = 0$. Međutim u [28] konstatira se da je ta razlika mala, te se kao donja granica efektivnog faktora intenziteta naprezanja može usvojiti izraz (79).

Ova modificirana vrijednost efektivnog faktora intenziteta naprezanja pokazuje značajno poboljšanje u korelaciji porasta duljine pukotine po ciklusu i koeficijenta asimetrije ciklusa u blizini praga širenja pukotine, dok za veće vrijednosti porasta duljine pukotine po ciklusu, tj. u području II

rasta pukotine (Parisovo područje) tradicionalni pristup (definiran izrazom (71)) daje bolje rezultate [36], [37].

Naime, u području blizu praga širenja pukotine dominantnu ulogu imaju zatvaranje pukotine uslijed hrapavosti i korozija. Kod ovih mehanizama zatvaranja pukotine, zbog smicanja površina pukotine određene hrapavosti i s nakupinama oksida, dolazi do kontakta površina pukotine prije nego što dođe do potpunog zatvaranja u vršku pukotine, to znači da dolazi do djelomičnog zatvaranja pukotine. U Parisovom području, međutim, dominantnu ulogu ima mehanizam zatvaranja pukotine uslijed plastičnosti, jer su u tom području hrapavost površina pukotine i veličina oksidnih čestica zanemarivi u odnosu na relativni razmak površina pukotine. Zbog toga je u [28] dano poboljšanje modela djelomičnog zatvaranja pukotine:

$$\Delta K_{\text{eff}} = K_{\text{max}} - K_{\text{cl}} \left[1 + \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) g \right] \quad (81)$$

gdje je g funkcija oblika:

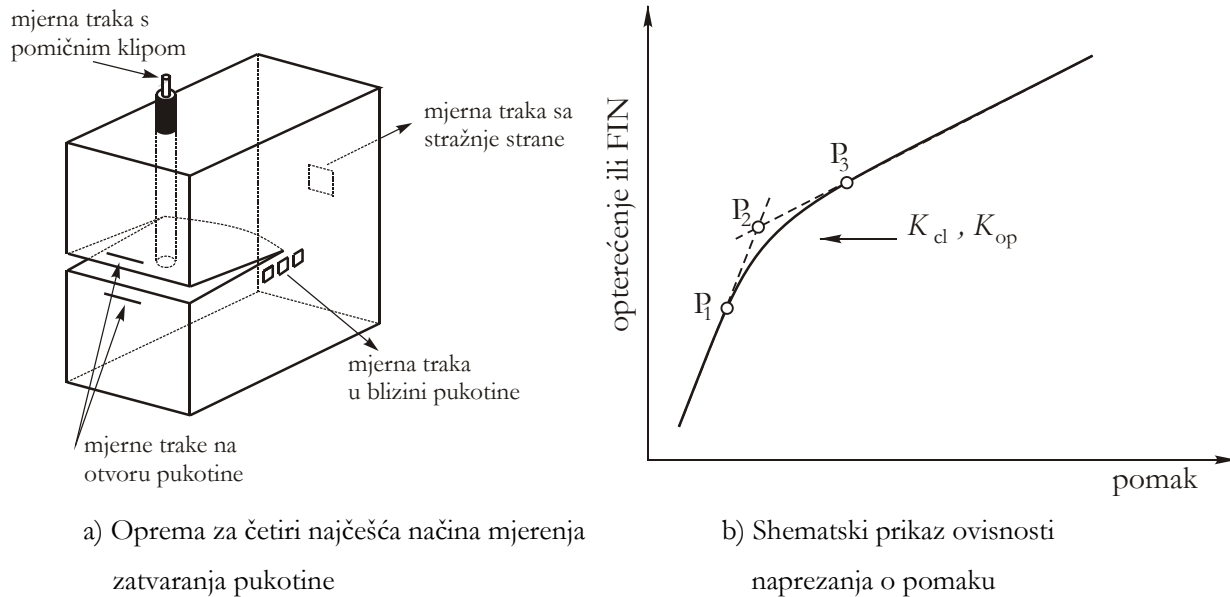
$$g = e^{-\left(\frac{K_{\text{max}}}{K_{\text{th}}} - 1 \right)}. \quad (82)$$

U blizini praga širenja pukotine ($K_{\text{max}} \rightarrow K_{\text{th}}$) funkcija $g \rightarrow 1$, pa se onda vrijednost efektivnog faktora intenziteta naprežanja približava onome izračunatome prema konceptu djelomičnog zatvaranja pukotine (79). U Parisovom području ($K_{\text{max}} \gg K_{\text{th}}$) funkcija $g \rightarrow 0$, pa se onda vrijednost efektivnog faktora intenziteta naprežanja približava onome izračunatome prema tradicionalnom pristupu (71).

5.2 Faktor intenziteta naprežanja zatvaranja pukotine

Metode određivanja FIN-a zatvaranja pukotine dijele se na eksperimentalne, numeričke i analitičke.

Postoji niz eksperimentalnih metoda otkrivanja zatvaranja pukotine, kao što su tehnike pada električnog potencijala, metode akustične emisije, ili primjerice uočavanje mjesta i trenutka prekidanja zraka svijetla [38], no najčešće korištena je metoda mehaničkog mjerenja ovisnosti pomaka o opterećenju (en. compliance method). Na slici 5.4a prikazani su mogući načini dobivanja ovisnosti pomaka i opterećenja, mjerenjem deformacije uzorka [31], a na slici 5.4b shematski je prikazana ovisnost opterećenja o pomaku za uzorak kod kojega dolazi do zatvaranja pukotine.



Slika 5.4 Metoda mehaničkog mjerenja krivulje ovisnosti pomaka o opterećenju

Gornji i donji dio krivulje imaju konstantne nagibe koji odgovaraju potpuno otvorenoj odnosno potpuno zatvorenoj pukotini. Međutim postoji niz problema u određivanju raspona opterećenja pri kojem dolazi do zatvaranja pukotine

Najprije, kao što se može uočiti na slici 5.4b, često postoji značajan raspon opterećenja za koje je pukotina djelomično zatvorena, pa se zatvaranje može definirati kao odklon od linearnosti u točkama P1 ili P3, ili ekstrapolacijom potpuno otvorene i potpuno zatvorene krivulje ovisnosti opterećenja o pomaku do točke presjecišta P2. Nadalje krivulja ovisnosti opterećenja o pomaku može postati histereza, tj. FIN zatvaranja i FIN otvaranja nisu jednaki, te također pojava šuma pri snimanju krivulje može onemogućiti ispravno određivanje trenutka zatvaranja pukotine.

Uloženo je mnogo napora ne bi li se ustanovila standardizirana eksperimentalna metoda kojom bi se navedeni problemi prevladali i time dala vjerodostojnost eksperimentalnim mjerenjima nivoa zatvaranja pukotina. Najčešće korištene metode određivanja nivoa zatvaranja pukotina su [39]:

- metoda promjene nagiba krivulje
- metoda aproksimacije krivulje

Točka se zatvaranja pukotine metodom promjene nagiba krivulje određuje promatranjem promjene lokalnog nagiba krivulje ovisnosti pomaka o opterećenju. Korištene definicije točke zatvaranja su:

- točka zatvaranja je ona točka u kojoj je lokalni nagib različit od nagiba u gornjem dijelu krivulje za određeni postotak (primjerice 5%) – ova metoda je prihvaćena od standarda ASTM E647-99.
- točka zatvaranja je ona točka za koju je promjena nagiba dva susjedna segmenta krivulje (krivulja je podijeljena na određeni broj segmenata jednake duljine) veća od nekog postotka (primjerice 5%).

Metodom aproksimacije krivulje, krivulja ovisnosti pomaka o opterećenju se dijeli na linearni dio (gornji dio) i dio aproksimiran polinomom drugog stupnja (donji dio). Točka zatvaranja pukotine je ona točka za koju je:

- apsolutna razlika u koordinatama ova dva dijela minimalna
- razlika u nagibima pravca (gornji dio) i segmenta polinoma (donji dio) minimalna.

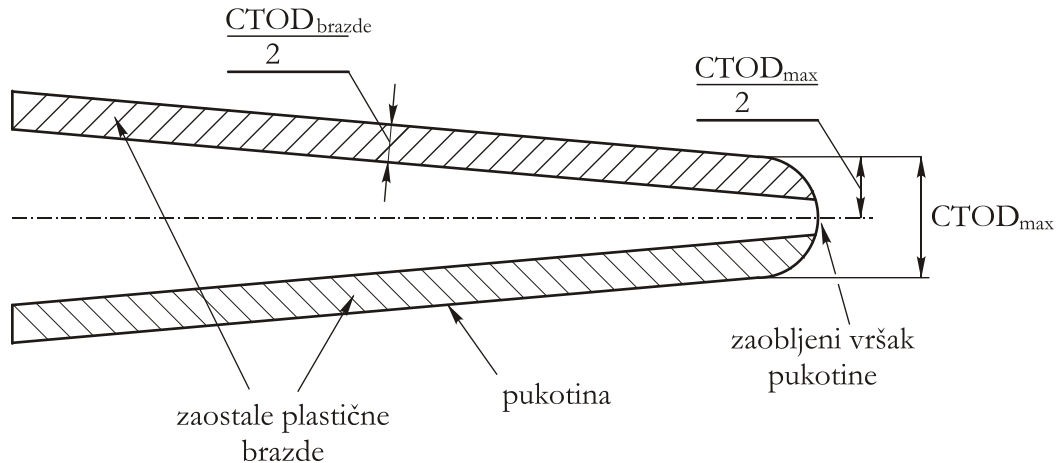
Usporedbom navedenih metoda određivanja točke zatvaranja pukotine u [39] ustanovljeno je da metoda aproksimacije krivulje daje bolje rezultate s aspekta osjetljivosti i konzistentnosti u odnosu na metodu promatranja promjene nagiba krivulje.

Što se tiče numeričkih modela zatvaranja pukotine, u uvodu u ovo poglavlje spomenute su najznačajnije numeričke metode određivanja zatvaranja pukotine uslijed plastičnosti, osim njih razvijeni su i neki numerički modeli zatvaranja pukotine uslijed hrapavosti kojima se najčešće površine pukotine idealiziraju pilastim profilom [40], [41].

Newman je u [42], [43] razvio analitički model u koji su uključeni mehanizmi zatvaranja pukotine uslijed plastičnosti, hrapavosti i korozije.

U ovim će se materijalima utjecaj hrapavosti i korozije uzeti u obzir modelom djelomičnog zatvaranja pukotine što će uz analitičku metodu određivanja faktora intenziteta naprezanja zatvaranja pukotine uslijed plastičnosti opisanu u [28] omogućiti izračunavanje efektivnog faktora intenziteta naprezanja.

Analitički model određivanja faktora intenziteta naprezanja zatvaranja pukotine uslijed plastičnosti koji je opisan u [42] predstavlja modifikaciju analitičkog modela Budiansky i Hutchinsona [31]. Model Budiansky i Hutchinsona povezuje zaostalu plastičnu deformaciju i pomak površina pukotine u njenom vršku okomito na smjer otvaranja pukotine (CTOD). U njihovom istraživanju dan je dijagram ovisnosti omjera veličine plastične brazde zaostale iza pukotine ($CTOD_{brazde}$) i vrijednosti $CTOD_{max}$ (CTOD pri maksimalnom opterećenju) (slika 5.5) o koeficijentu asimetrije ciklusa opterećenja.



Slika 5.5 Vršak pukotine pri djelovanju maksimalnog opterećenja

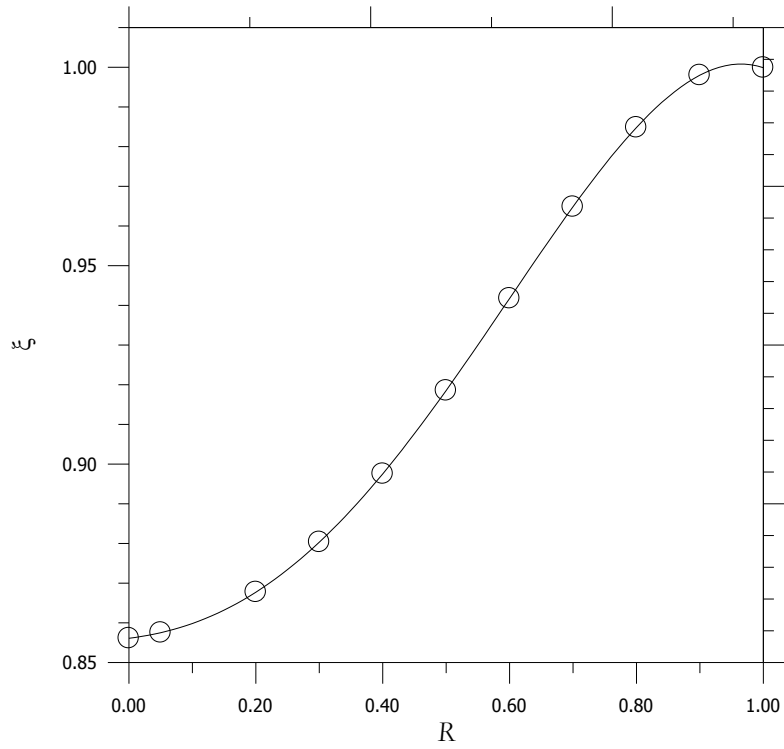
Na slici 5.6 rezultati Budiansky i Hutchinsona su prikazani simbolima, a kroz te točke je Newman [42] aproksimirao polinom četvrtog stupnja:

$$\xi = \frac{\text{CTOD}_{\text{brazde}}}{\text{CTOD}_{\text{max}}} = 0,8561 + 0,0205R + 0,1438R^2 + 0,2802R^3 - 0,3007R^4. \quad (83)$$

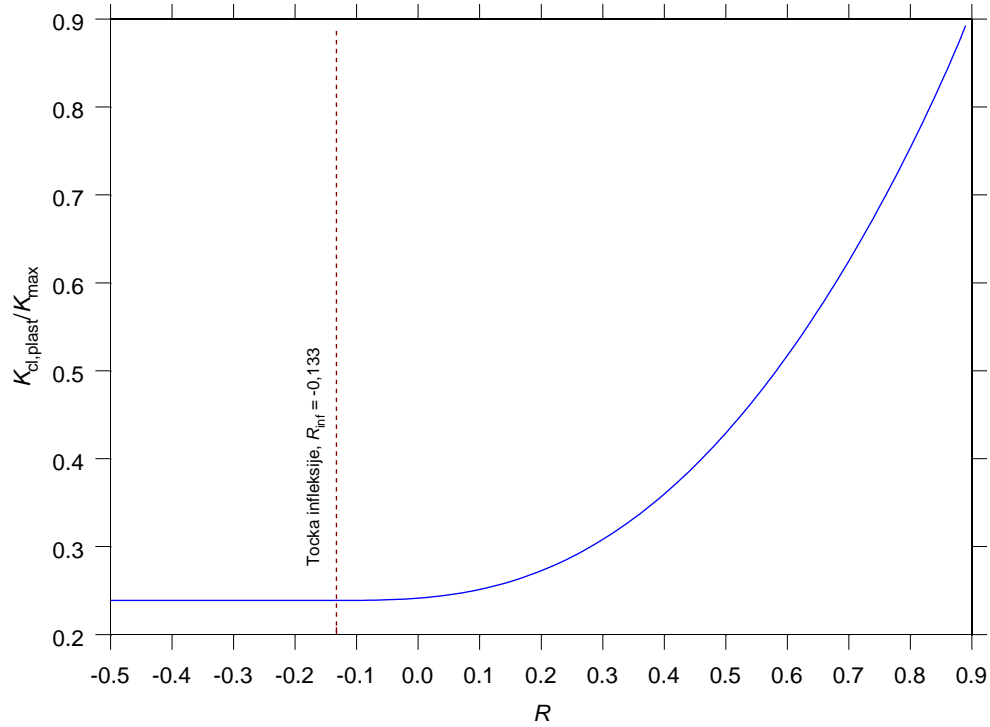
Korištenje izraza (83) umjesto kompletne procedure Budiansky i Hutchinsona značajno pojednostavljuje izračunavanje faktora intenziteta napreznja zatvaranja pukotine, koji se za slučaj zatvaranja pukotine uslijed plastičnosti izračunava iz izraza:

$$K_{\text{cl, plast}} = K_{\text{max}} \left(1 - 2\sqrt{1 - \xi} \right). \quad (84)$$

Prema Newmanu [42] ovisnost $\xi = f(R)$ definirana je za pozitivne vrijednosti koeficijenta asimetrije ciklusa. Ovdje će se krivulja $K_{\text{cl, plast}}/K_{\text{max}} = f(R)$ (84) produžiti i u negativno područje koeficijenta asimetrije ciklusa, ali će se provesti modifikacija slično kao u programu AFGROW [44], [45] tako da će se izračunati točka infleksije izraza (84) (R_{inf}) pa će se za $R \leq R_{\text{inf}}$ omjer $K_{\text{cl, plast}}/K_{\text{max}}$ uzeti jednak onome u točki infleksije (slika 5.7).



Slika 5.6 Promjena faktora ξ s koeficijentom asimetrije ciklusa R [31]

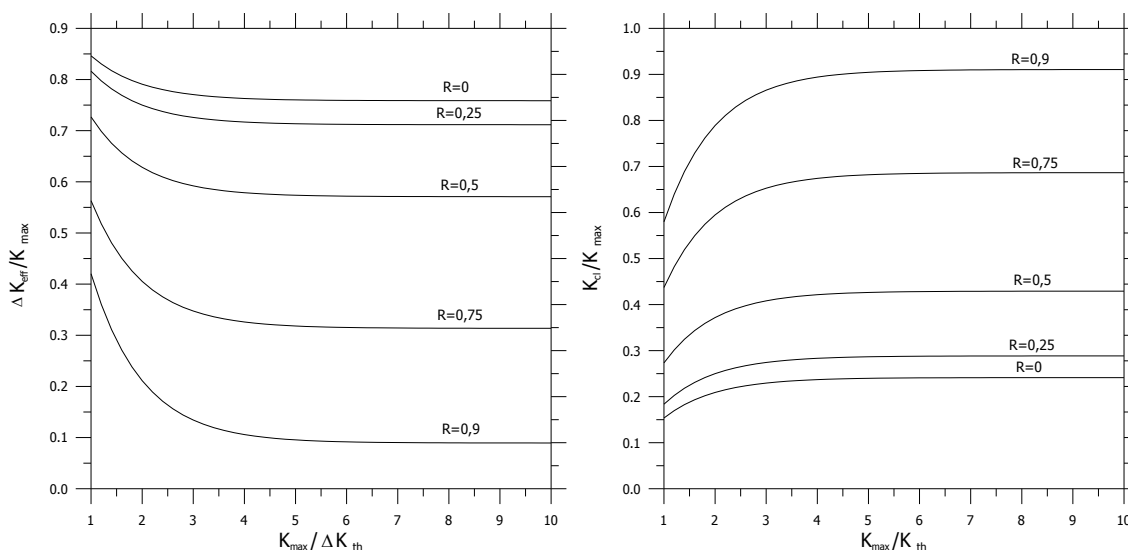


Slika 5.7 Promjena omjera $K_{cl,plast}/K_{max}$ s koeficijentom asimetrije ciklusa R

Uvrštavanjem izraza (84) u izraz (81) dobiva se izraz za izračunavanje efektivnog faktora intenziteta napreznja, koji uzima u obzir sve navedene mehanizme zatvaranja pukotine, a vrijedi u cijelom području rasta pukotine, od praga širenja do konačnog loma.

$$\Delta K_{\text{eff}} = K_{\text{max}} \left\{ 1 - \left(1 - 2\sqrt{1-\xi} \right) \left[1 + \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) g \right] \right\}. \quad (85)$$

Ovdje izveden izraz zasnovan je na najnovijim spoznajama o zatvaranju pukotine [28], a u odnosu na izraze, odnosno proceduru danu u [42], [43] ima značajno jednostavniji oblik.



Slika 5.8 Grafički prikaz izraza (85)

Na slici 5.8 prikazana je promjena efektivnog faktora intenziteta napreznja i faktora intenziteta napreznja zatvaranja pukotine s promjenom maksimalnog faktora intenziteta napreznja za različite faktore asimetrije ciklusa opterećenja.

5.3 Ograničenje primjene linearno elastične mehanike loma

Prema ASTM E399 standardu ukoliko je omjer veličine zone u kojoj je materijal plastično deformiran r_p prema duljini pukotine a manji od 0,4 tada se mogu primijeniti principi linearno elastične mehanike loma:

$$\frac{r_p}{a} < 0,4. \quad (86)$$

Granica između plastičnog i elastičnog područja može se odrediti izjednačavanjem von Mises ekvivalentnog napreznja i granice tečenja materijala. Za $\theta=0$ i ravninsko stanje deformacije dobiva se izraz:

$$r_p^* = \frac{1}{2\pi R_t^2} \left[K_I^2 (1-2\nu)^2 + 3K_{II}^2 \right]. \quad (87)$$

Obzirom da je izraz izveden iz napreznja linearno elastičnog materijala (izrazi (6) do (8)), potrebno je na neki način uzeti u obzir povećanje plastične zone do koje će doći zbog redistribucije napreznja prilikom dostizanja granice tečenja. Prema [42] veličina plastične zone s redistribuiranim napreznjem je jednaka:

$$r_p = 1,828 \cdot r_p^*. \quad (88)$$

Ovi izrazi su izvedeni za statičko opterećenje. Kod dinamičkog opterećenja, prilikom rasterećenja dolazi do povratnog plastičnog toka, koji se uzima u obzir uvrštavanjem $\Delta K_I/2$ umjesto K_I , i $\Delta K_{II}/2$ umjesto K_{II} u izraz (87). Uvrštavanjem u izraz (86) dobiva se područje primjene linearno elastične mehanike loma:

$$a > 0,0914 \frac{1}{\pi R_t^2} \left[\Delta K_I^2 (1-2\nu)^2 + 3\Delta K_{II}^2 \right]. \quad (89)$$

6. ŠIRENJE PUKOTINE U KORIJENU ZUBA ZUPČANIKA

6.1 Model zupčanika

Za slučaj simetrične raspodjele opterećenja po dužini boka zuba, dvodimenzionalni modeli zupčanika daju rezultate približno jednake onima dobivenih analizom trodimenzionalnih modela, a uz znatno manji utrošak vremena za izradu modela i dobivanje rezultata.

Za dobivanje geometrije zuba zupčanika izrađen je program u Visual Basic for Applications unutar AutoCAD-a koji za unesene karakteristike zupčanika i alata crta profil (slika 6.1).

Crtanje profila zuba zupčanika ✖

modul (m), mm

faktor pomaka profila (x)

broj zubi (z)

Promjer preko glave

bez skracenja glave sa skracenjem glave

Profil alata

kut zahvatne linije (alfa), st

relativna tjemena zracnost ($c^*=c/m$)

relativni radijus zakrivljenosti podnozja ($r_o^*=r_o/m$)

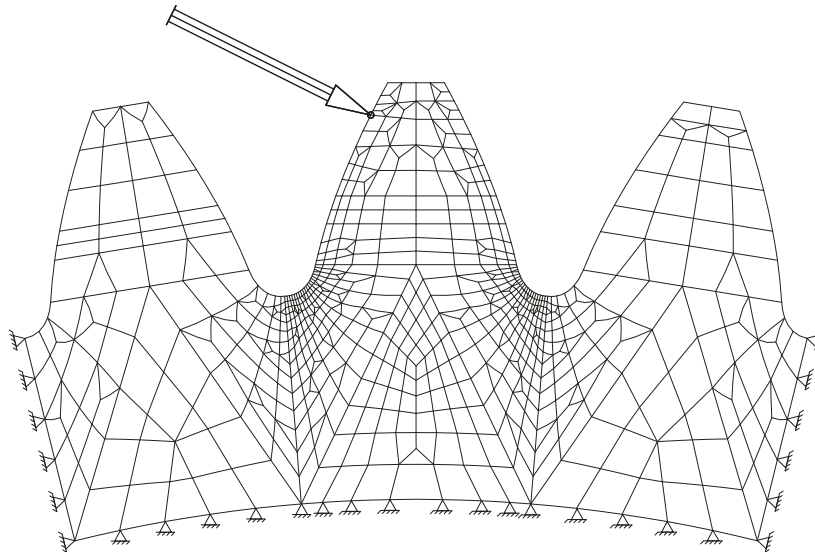
Zupčanik s kojim se sparuje

broj zubi (z)

faktor pomaka profila (x)

Slika 6.1 Prozor u AutoCAD-u za upisivanje podataka potrebnih za crtanje zupčanika

Profil zuba zupčanika učita se u neki programski paket za analizu metodom konačnih elemenata (npr. ADINA) i tu se generira mreža konačnih elemenata.



Slika 6.2 Model zupčanika

Rubni uvjeti su modelirani prema slici 6.2, dakle onemogućeni su pomaci svih čvorova na lijevoj, desnoj i donjoj strani modela.

Udaljenost između kruga preko korijena i donje strane modela zupčanika je uzeta jednaka visini zuba, jer je tada zanemariv utjecaj uklještenja donje strane modela na rotaciju baze zuba.

Numerička simulacija rasta pukotine provedena je u programskom paketu FRANC2D [46], [47].

FRANC2D je paket u kojem je moguća provedba poluautomatske simulacije širenja pukotine. Korisnik treba prije svakog koraka produljenja pukotine definirati iznos produljenja, a sve ostalo se provodi automatski u slijedećim koracima:

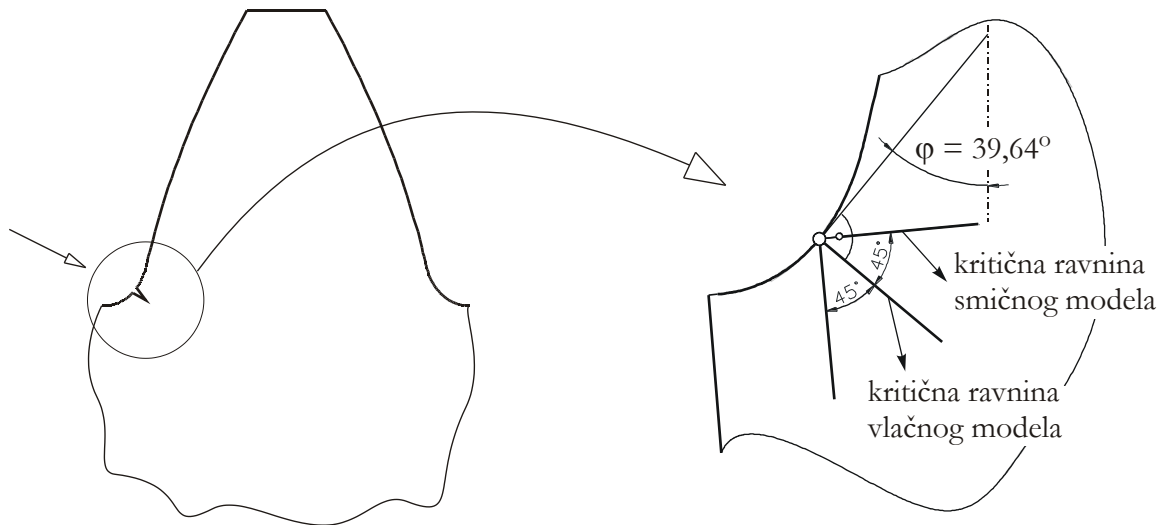
- 1) Analiza metodom konačnih elemenata.
- 2) Izračunavanje faktora intenziteta naprezanja.
- 3) Određivanje smjera širenja pukotine.
- 4) Lokalno brisanje mreže konačnih elemenata u području u koje će se produljiti pukotina.
- 5) Produljenje pukotine za zadani iznos produljenja u smjeru izračunatom u točki 3.
- 6) Automatsko obnavljanje mreže konačnih elemenata.

Tablica 6-1 Podaci o zupčanom paru

Ulazni podaci	
z_1	11
z_2	39
m , mm	4,5 mm
x_1	0,526
x_2	0,0593
b_1 , mm	32,5
b_2 , mm	28
α_n	24
c^*	0,35
ρ_f^*	0,25
<i>promjer preko glave</i>	sa skraćnjem glave

Izračunate veličine	
a	115 mm
d_1	49,5 mm
d_2	175,5 mm
d_{w1}	50,600 mm
d_{w2}	179,401 mm
d_{b1}	45,221 mm
d_{b2}	160,327 mm
d_{a1}	62,968 mm
d_{a2}	184,767 mm
d_{f1}	42,084 mm
d_{f2}	163,884 mm
ε_a	1,256
s_{F2}	10,656 mm
h_{F2}	7,147 mm
Y_{F2} (DIN 3990B)	1,66346
Y_{S2} (DIN 3990B)	1,97543

Da bi se moglo započeti sa simulacijom rasta pukotine potrebno je poznavati duljinu, lokaciju i orijentaciju inicirane pukotine. Lokacija i orijentacija inicirane pukotine za konkretnu geometriju (Tablica 6-1) i materijal zupčanika (42 Cr Mo 4 – AISI 4142 – Č4732) prethodno su korištenjem metode kritične ravnine [48] određeni i definirani su na slici 6.3.



Slika 6.3 Kritična lokacija je kritična ravnina vlačnog modela

Kritična ravnina vlačnog modela općenito je uvijek okomita na površinu strojnog dijela, pa onda proizlazi da kod dvodimenzionalnog modela kritična ravnina vlačnog modela predstavlja ravninu maksimalnog glavnog naprezanja. Kritična ravnina smičnog modela za dvodimenzionalni model predstavlja ravninu maksimalne smične deformacije koja s ravninom maksimalnog glavnog naprezanja zatvara kut od 45° .

S obzirom da je analizom ciklusa naprezanja u korijenu zuba utvrđeno da je najveće naprezanje na prijelaznoj krivulji uvijek kad je opterećenje u krajnjoj točki jednostrukog zahvata, onda proizlazi da će u ravnini okomitoj na površinu, u točki najvećeg maksimalnog glavnog naprezanja, biti najveća vrijednost vlačnog parametra oštećenja, a u ravnini nagnutoj pod 45° u odnosu na tu ravninu najveća vrijednost smičnog parametra oštećenja.

Analizom je utvrđeno [48] da za zupčani par iz primjera kritična ravnina je kritična ravnina vlačnog modela.

Podaci o materijalu potrebni za izračunavanje brzine širenja pukotine dani su u tablici 6-2 [49].

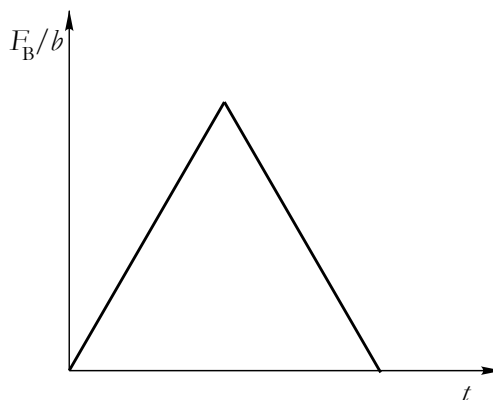
Tablica 6-2 Podaci o materijalu

42 Cr Mo 4 – SAE(AISI) 4142 – Č4732			
ΔK_{th} , MPa $\sqrt{\text{mm}}$	269	$\frac{C, \text{mm}}{\text{ciklus} \times (\text{MPa}\sqrt{\text{mm}})^m}$	$3,31 \cdot 10^{-17}$
K_{Ic} , MPa $\sqrt{\text{mm}}$	2620	m	4,16

Na osnovu analize provedene u [48] Odabire se duljina inicirane pukotine od 200 μm .

6.1.1.1 Širenje pukotine uz aproksimaciju opterećenja silom u početnoj točki jednostrukog zahvata

U istraživanjima širenja pukotine u korijenu zuba zupčanika opterećenje se najčešće aproksimira ciklusom kod kojeg sila na zub djeluje u početnoj točki jednostrukog zahvata i mijenja iznos od nula do maksimalne vrijednosti (slika 6.4).



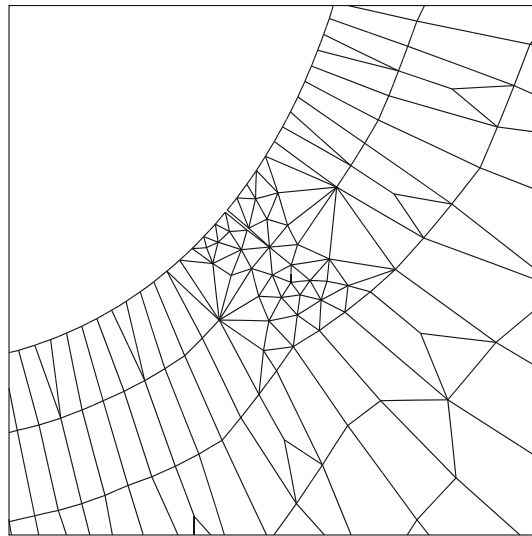
Slika 6.4 Aproksimativni ciklus opterećenja silom u početnoj točki jednostrukog zahvata

Inicirana pukotina definirane duljine postavlja se u kritičnu lokaciju na kritičnu ravninu pa se provodi analiza metodom konačnih elemenata (slika 6.5).

Iz izračunatih pomaka čvorova oko vrška pukotine izračunavaju se faktori intenziteta naprezanja.

U paket FRANC2D su uključene tri metode određivanja faktora intenziteta naprezanja: metoda korelacije pomaka (poglavlje 3.2.1), metoda modificiranog integrala zatvaranja pukotine (poglavlje 3.2.2) i metoda J-integrala (poglavlje 3.2.3). Prema [47] i [50] sve tri metode u slučaju dovoljno usitnjene mreže konačnih elemenata daju iste, točne rezultate. Ipak, prema [47] u slučajevima

pukotina proizvoljne geometrije opterećenih kompleksnim opterećenjima mješovitog tipa, metode modificiranog integrala zatvaranja pukotine i J-integrala su pouzdanije od metode korelacije pomaka.



Slika 6.5 Inicijalna pukotina

Na osnovu navedenog u materijalu će se faktori intenziteta naprezanja izračunavati metodom J-integrala.

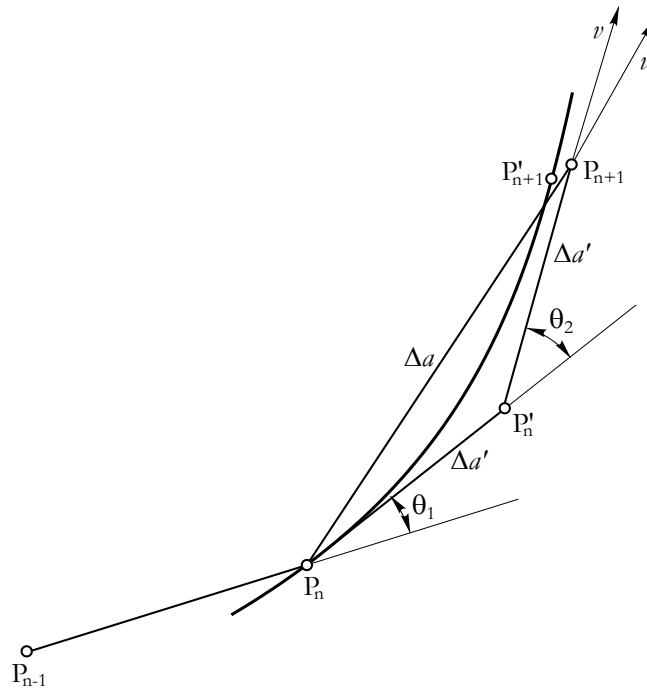
Iz izračunatih faktora intenziteta naprezanja određuje se smjer širenja pukotine. U paket su uključena tri kriterija: MCN-kriterij, S-kriterij i G-kriterij.

Prema [47] sva tri kriterija daju približno iste rezultate, odnosno približno iste staze pukotine. Obzirom da MCN-kriterij ima najjednostavniji oblik, u ovom radu će se smjer širenja pukotine izračunavati iz MCN-kriterija.

Nakon toga u izračunatom smjeru treba produljiti pukotinu za iznos produljenja Δa . Ovo produljenje definira korisnik, a pri njegovom određivanju treba voditi računa o vremenu potrebnom za izračunavanje i o potrebnoj točnosti rezultata. Premalo produljenje povećava vrijeme izračunavanja staze pukotine i vijeka trajanja, a prevelikim produljenjem dolazi do grešaka koje se akumuliraju sa svakim novim korakom produljenja. Iznos produljenja bi trebalo smanjiti na dionicama gdje su veće vrijednosti omjera K_{II}/K_I , te na područjima gdje su veće vrijednosti gradijenta faktora intenziteta naprezanja.

Jedan način određivanja iznosa produljenja opisan je u [51] (slika 6.6).

Kružni luk $P_n P'_{n+1}$ prikazan na slici 6.6 predstavlja stvarnu stazu pukotine, ta staza može se aproksimirati ili sa dvije tangente $P_n P'_n$ i $P'_n P_{n+1}$ ili jednom sekantom $P_n P_{n+1}$.



Slika 6.6 Stvarna i aproksimirana staza pukotine

Procedura dobivanja karakterističnih točaka staze je kako slijedi: ukoliko se vršak pukotine nakon n -tog koraka produljenja nalazi u točki P_n , tada se do novog položaja vrška pukotine P_{n+1} može doći tako da se pomoću MCN kriterija izračuna kut θ_1 i produlji pukotina za iznos $\Delta a'$ do točke P'_n . S vrškom pukotine u točki P'_n izračunaju se novi faktori intenziteta naprezanja i izračuna MCN kriterijem novi kut θ_2 pod kojim će doći do produljenja pukotine za iznos $\Delta a'$ do točke P_{n+1} . Na opisani način dobivena je tangencijalna staza pukotine $P_n P'_n P_{n+1}$, a sekantna staza pukotine dobije se spajanjem točaka P_n i P_{n+1} . Sa vrškom pukotine u P_{n+1} izračunavaju se faktori intenziteta naprezanja za pukotinu aproksimiranu s dvije tangente pa se iz njih MCN kriterijem dobiva novi pravac produljenja v' , odnosno pravac produljenja v dobiven MCN kriterijem za faktore intenziteta naprezanja pukotine aproksimirane sekantom.

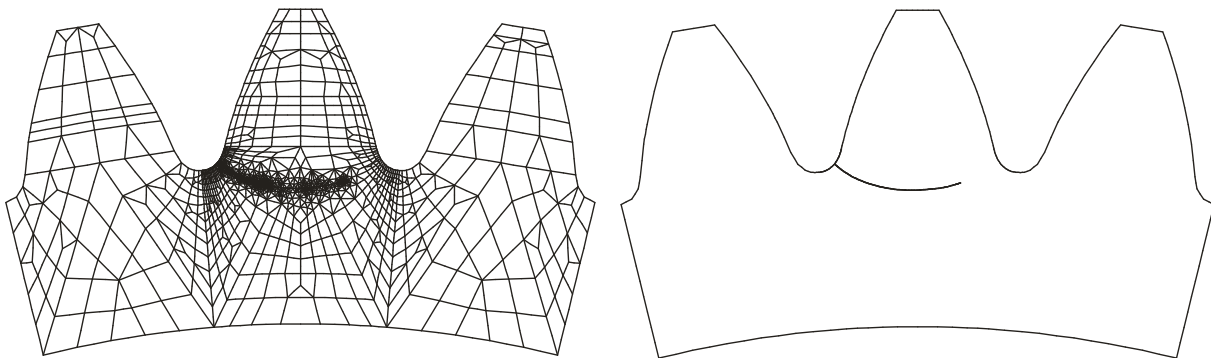
Uvjet koji pravci produljenja trebaju zadovoljiti opisan je nejednadžbom:

$$|v - v'| \leq e \quad (90)$$

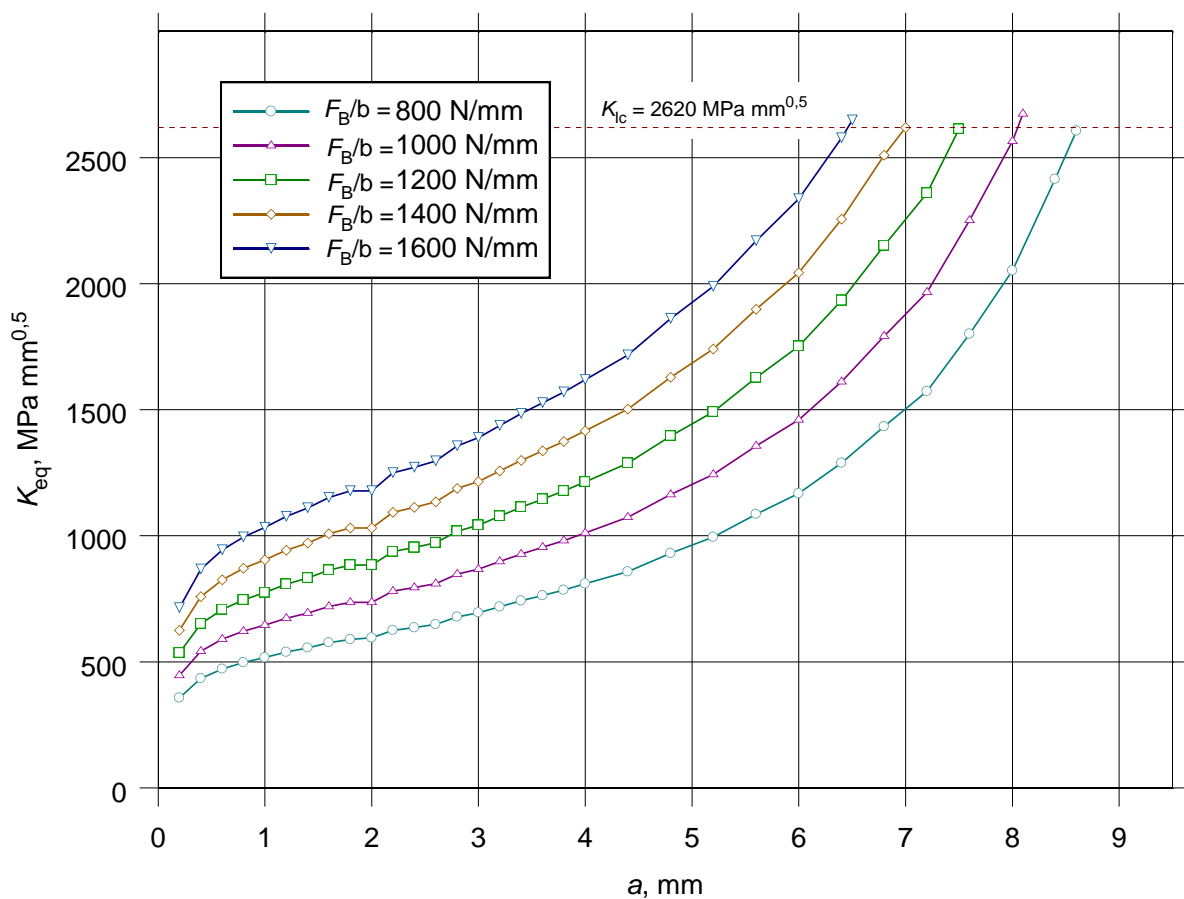
gdje je e granični kut koji prema [51] iznosi $0,1^\circ$. Iznos produljenja za koji je zadovoljen uvjet (90) definira sekantu $P_n P_{n+1}$ koja se odabire kao staza pukotine.

Svakih pet koraka provedena je opisana analiza iznosa produljenja te je odabran iznos produljenja od 0,2 mm do duljine pukotine od 4 mm, a nakon te duljine pukotine iznos produljenja od 0,4 mm. Odabrana produljenja zadovoljavaju uvjet (90) duž čitave staze pukotine. Također je

svakih pet koraka provedena kontrola primjenjivosti principa linearno elastične mehanike loma prema izrazu (89).



Slika 6.7 Predviđena staza pukotine



Slika 6.8 Ovisnost faktora intenziteta naprezanja o duljini pukotine za pukotinu iniciranu prema vlačnom modelu

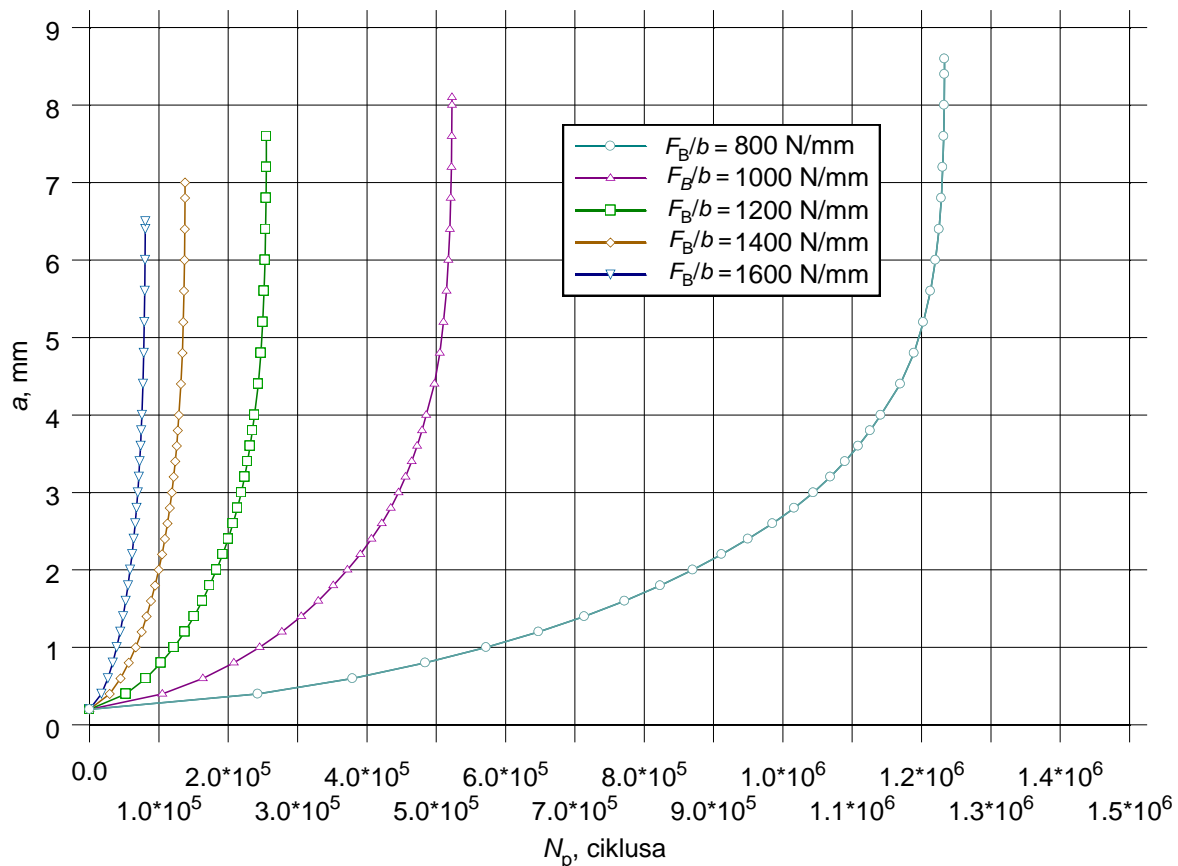
Pukotina se produljuje sve dok ekvivalentni faktor intenziteta naprezanja koji se izračunava iz izraza (67) ne dostigne kritičnu vrijednost K_{Ic} .

Na kraju se kao rezultat dobiva staza pukotine (slika 6.7) i ovisnost faktora intenziteta naprezanja o duljini pukotine (slika 6.8).

Uvrštavanjem ekvivalentnih faktora intenziteta naprezanja u izraz (85) dobivaju se efektivni faktori intenziteta naprezanja. Korištenjem podataka o materijalu te provođenjem numeričke integracije jednadžbe (73) izračunava se broj ciklusa potreban za rast pukotine od inicirane do kritične duljine pukotine:

$$\int_0^{N_p} dN = \frac{1}{C} \int_{a_2}^{a_c} \frac{da}{[\Delta K_{\text{eff}}(a)]^m} \quad (91)$$

Promjena duljine pukotine s brojem ciklusa za pukotinu iniciranu prema vlačnom modelu prikazana je na slici 6.9, a izračunati vjekovi trajanja i kritične duljine pukotine prikazani su u tablici 6.3.



Slika 6.9 Promjena duljine pukotine s brojem ciklusa za pukotinu iniciranu prema vlačnom modelu

Tablica 6-3 Broj ciklusa potreban za rast pukotine od inicirane do kritične duljine

F_B/b , N/mm	Kritična duljina pukotine a_c , mm		Broj ciklusa, N_p	
	Za pukotinu iniciranu prema vlačnom modelu	Za pukotinu iniciranu prema smičnom modelu	Za pukotinu iniciranu prema vlačnom modelu	Za pukotinu iniciranu prema smičnom modelu
800	8,6	8,5	$1,233 \cdot 10^6$	$1,563 \cdot 10^6$
1000	8,1	8,0	$5,226 \cdot 10^5$	$6,646 \cdot 10^5$
1200	7,5	7,5	$2,550 \cdot 10^5$	$3,274 \cdot 10^5$
1400	7,0	6,9	$1,378 \cdot 10^5$	$1,786 \cdot 10^5$
1600	6,5	6,4	$8,026 \cdot 10^4$	$1,050 \cdot 10^5$

LITERATURA

- [1] Anderson, T.L., Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications – Second Edition, CRC Press, 1995.
- [2] Blake, A., Practical Fracture Mechanics in Design, Marcel Dekker, Inc., 1996.
- [3] Barsoum, R.S., On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, Journal Numer. Methods Engrg., 10, pp. 25-37, 1976.
- [4] Shih, C.F., de Lorenzi, H.G., German, M.D., Crack Extension Modeling with Singular Quadratic Isoparametric Elements, Int. J. Fract., 12, pp. 647-651, 1976.
- [5] Raju, I.S., Calculation of Strain-Energy Release Rates with Higher Order and Singular Finite Elements, Engineering Fracture Mechanics, 28(3), pp.251-274, 1987.
- [6] Badari Narayana, K., Dattaguru, B., Certain Aspects Related to Computation by Modified Crack Closure Integral (MCCI), Engineering Fracture Mechanics, 55(2), pp. 335-339, 1996.
- [7] Raju, I.S., Shivakumar, K.N., An Equivalent Domain Integral Method in the Two-Dimensional Analysis of Mixed Mode Crack Problems, Engineering Fracture Mechanics, 37(4), pp.707-725, 1990.
- [8] Rybicki, E.F., Kanninen, M.F., A Finite Element Calculation of Stress Intensity Factors by a Modified Crack Closure Integral, Engng Fracture Mech, 9, pp. 931-938, 1977.
- [9] Hellen, T.K., On the Method of Virtual Crack Extension, Int. J. Numer. Meth. Eng., 9(1), pp. 187-207, 1975.
- [10] Qian, J., Fatemi, A., Mixed Mode Fatigue Crack Growth, Engineering Fracture Mechanics, 55(6), pp. 1277-1284, 1996.
- [11] Khan, S.M.A., Khraisheh, M.K., Analysis of Mixed Mode Crack Initiation Angles under Various Loading Conditions, Engineering Fracture Mechanics, 67, pp. 397-419, 2000.
- [12] Abdel Mageed, A.M., Pandey, R.K., Mixed mode crack growth under static and cyclic loading in A1-alloy sheets, Engineering Fracture Mechanics, 40(2), pp. 371-385, 1991.
- [13] Erdogan, F., Sih, G.C., On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear, J Basic Eng D, 85, pp. 519-525, 1963.
- [14] Sih, G.C., Strain Energy Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems, Int. J. Fract., 10, pp. 305-321, 1974.
- [15] Hussain, M.A., Pu, S.L., Underwood, J., Strain Energy Release Rate for a Crack under Combined Mode I and Mode II, Fract Anal ASTM STP, 560, pp. 2-28, 1974.

-
- [16] Irwin, G.R., Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys, Sagamore Research Conference Proceedings, 2, pp. 289-305, 1956
- [17] Nuismer, R.J., An Energy release Rate Criterion for Mixed Mode Fracture, International Journal of Fatigue, 11, pp. 245-250, 1975.
- [18] Wang, C.H., Introduction to Fracture Mechanics, DSTO-GD-0103, Department of Defence, 1996.
- [19] Yishu, Z., Griffith's Criterion for Mixed Mode Crack Propagation, Engineering Fracture Mechanics, 26(5), pp. 683-689, 1987.
- [20] Ichikawa, M., A Note on Mixed Mode Energy Release Rate, Engineering Fracture Mechanics, 26(2), pp. 311-312, 1987.
- [21] Wang, M.H., A Theory for the Mixed Energy Release Rate, Engineering Fracture Mechanics, 22(4), pp. 661-671, 1985.
- [22] Andersen, M.R., Fatigue Crack Initiation and Growth in Ship Structures, PhD Thesis, Technical University of Denmark, 1998.
- [23] Yan, X., Du, S., Zhang, Z., Mixed-Mode Fatigue Crack Growth Prediction in Biaxially Stretched Sheets, Engineering Fracture Mechanics, 43(3), pp. 471-475, 1992.
- [24] Tanaka, K., Fatigue Crack Propagation from a Crack Inclined to the Cycle Tensile Axis, Engineering Fracture Mechanics, 6, pp. 493-507, 1974.
- [25] Sih, G.C., Barthelmy, B.M., Mixed Mode Fatigue Crack Growth Prediction, Engineering Fracture Mechanics, 13, pp. 439-451, 1980.
- [26] Abdel Mageed, A.M, Pandey, R.K., Studies on Cyclic Crack Path and the Mixed-Mode Crack Closure Behaviour in Al Alloy, International Journal of Fatigue, 14(1), pp. 21-29, 1992.
- [27] Pavlou, D.G., Labeas, G.N., Vlachakis, N.V., Pavlou, F.G., Fatigue Crack Propagation Trajectories under Mixed-Mode Cyclic Loading, Engineering Structures, 25, pp. 869-875, 2003
- [28] Kujawski, D., Enhanced Model of Partial Crack Closure for Correlation of R – Ratio Effects in Aluminum Alloys, International Journal of Fatigue, 23, pp. 95-102, 2001.
- [29] Newman, J.C. Jr., The Merging of Fatigue and Fracture Mechanics Concepts: a Historical Perspective, Progress in Aerospace Sciences, 34, pp. 347-390, 1998.
- [30] Elber, W., Fatigue Crack Closure under Cyclic Tension, Engineering Fracture Mechanics, 2, 37-45, 1970.
-

- [31] Budiansky, B., Hutchinson, J.W., Analysis of Closure in Fatigue Crack Growth, *Journal of Applied Mechanics*, 45, pp. 267-276, 1978.
- [32] Ibsen, J.B., Agerskov, H., An Analytical Model for Fatigue Life Prediction Based on Fracture Mechanics and Crack Closure, *Journal Construct. Steel Res.*, 37(3), pp. 229-261, 1996.
- [33] Kim, J.H., Lee, S.B., Prediction of Crack Opening Stress for Part-Through Cracks and its Verification using a Modified Strip.Yield Model, *Engineering Fracture Mechanics*, 66, pp. 1-14, 2000.
- [34] Solanki, K., Daniewicz, S.R., Newman, J.C. Jr., A New Methodology for Computing Crack Opening from Finite Element Analyses, *Engineering Fracture Mechanics*, ...,2003.
- [35] Kujawski, D., ΔK_{eff} Parameter under Re-examination, *International Journal of Fatigue*, 25(9-11), pp. 793-800, 2003.
- [36] Paris, P.C., Tada, H., Donald, J.K., Service Load Fatigue Damage – a Historical Perspective, *International Journal of Fatigue*, 21, pp.S35-S46, 1999.
- [37] Kujawski, D., Utilization of Partial Crack Closure for Fatigue Crack Growth Modeling, *Engineering Fracture Mechanics*, 69, pp. 1315-1324, 2002.
- [38] Taylor, D., *Fatigue Threshold*, Butterworths & Co., 1989.
- [39] Xu, Y., Gregson, P.J., Sinclair, I., Systematic Assessment and Validation of Compliance-Based Crack Closure Measurements in Fatigue, *Materials Science and Engineering*, A284, pp. 114-125, 2000.
- [40] Llorca, J., Roughness Induced Fatigue Crack Closure: a Numerical Study, *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 15, pp.665-669, 1992.
- [41] Zhang, X.P., Li, J.C., Wang, C.H., Ye, L., Mai, Y.W., Prediction of Short Fatigue Crack Propagation Behaviour by Characterization of Both Plasticity and Roughness Induced Crack Closures, *International Journal of Fatigue*, 24, pp. 529-536, 2002.
- [42] Newman, J.A., Riddell, W.T., Piascik, R.S., A Threshold Fatigue Crack Closure Model: Part I – Model Development, *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 26, pp. 603-614, 2003.
- [43] Newman, J.A., Riddell, W.T., Piascik, R.S., A Threshold Fatigue Crack Closure Model: Part II – Experimental Verification, *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 26, pp. 615-625, 2003.
- [44] Harter, J.A., AFGROW Users Guide and Technical Manual, Air Force Research Laboratory Report, 2002.
- [45] Harter, J.A., Comparison of Contemporary FCG Life Prediction Tools, *International Journal of Fatigue*, 21, pp.S181-S185, 1999. Literatura – duljina inicirane pukotine

-
- [46] FRANC2D, User's Guide, Version 2.7, Cornell University, 1993.
- [47] Bittencourt, T.N., Wawrzynek, P.A., Ingraffea, A.R., Sousa, J.L., Quasi-Automatic Simulation of Crack Propagation for 2D LEFM Problems, *Engineering Fracture Mechanics*, 55 (2), pp. 321-334, 1996.
- [48] Podrug, S., Jelaska, D., Glodež, S., Influence of different load models on gear crack path shapes and fatigue lives, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 31, 5; pp. 327-339, 2008
- [49] Glodež, S., Šraml, M., Kramberger, J., A Computational Model for Determination of Service Life of Gears, *International Journal of Fatigue*, 24(10), pp 1013-1020, 2002.
- [50] Miranda, A.C.O., Meggiolaro, M.A., Castro, J.T.P., Martha, L.F, Fatigue Life Prediction of Complex 2D Components under Mixed-Mode Variable Amplitude Loading, *International Journal of Fatigue*, 25(9-11), pp. 1157- 1167, 2003.
- [51] Denda, M., Dong, Y.F., Analytical Formulas for a 2-D Crack tip Singular Boundary Element for Rectilinear Cracks and Crack Growth Analysis, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23, pp. 35-49, 1999.