

SVEUČILIŠTE U SPLITU

---

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE,  
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIGITALNE TELEKOMUNIKACIJE

Laboratorijske vježbe – upute za rad i zadaci

Joško Radić, Petar Šolić



# Sadržaj

Popis slika	ii
Popis tablica	iv
Uvod	1
<b>1 Dijagram oka</b>	<b>2</b>
1.1 Zadaci . . . . .	6
1.2 Izvještaj . . . . .	7
<b>2 Ekvalizacija</b>	<b>9</b>
2.1 Zadaci . . . . .	12
2.2 Izvještaj . . . . .	13
<b>3 Skrembliranje</b>	<b>14</b>
3.1 Zadaci . . . . .	16
3.2 Izvještaj . . . . .	17
<b>4 Redundantno kodiranje: Blok kodovi</b>	<b>18</b>
4.1 Zadaci . . . . .	20
4.2 Izvještaj . . . . .	22
<b>5 Redundantno kodiranje: Konvolucijski kodovi</b>	<b>24</b>
5.1 Zadaci . . . . .	27
5.2 Izvještaj . . . . .	28
<b>6 Optimalni prijammnik</b>	<b>31</b>
6.1 Zadaci . . . . .	35
6.2 Izvještaj . . . . .	36

# Popis slika

1.1	Primjer interferencije u prijemnom signalu. . . . .	3
1.2	Blok shema komunikacijskog sustava u osnovnom pojasu. . . . .	3
1.3	Pravokutni filtar . . . . .	3
1.4	Odziv pravokutnog filtra . . . . .	4
1.5	Odziv pravokutnog filtra na dva delta impulsa koji nailaze u razmaku $t_0 = 1/(2f_0)$ . . . . .	4
1.6	Frekvencijska karakteristika filtra tipa podignuti kosinus . . . . .	5
1.7	Odziv u vremenskom području filtra tipa podignuti kosinus . . . . .	5
1.8	Primjer dijagrama oka bez interferencije (lijevo) i s interferencijom (desno) . . . . .	6
2.1	Model komunikacijskog kanala . . . . .	9
2.2	Odziv pravokutnog filtra . . . . .	10
2.3	Komunikacijski sustav s pravokutnim filtrom kao prijenosnom funkcijom i interferencijom u odzivu . . . . .	10
2.4	Valni oblik odziva komunikacijskog sustava s interferencijom . . . . .	10
2.5	Valni oblik odziva komunikacijskog sustava s interferencijom . . . . .	10
3.1	Blok shema skremlera . . . . .	14
3.2	Autokorelacija pseudošumne sekvence . . . . .	15
4.1	Geometrijsko predstavljanje dviju kodnih riječi Hammingove distance $d_H = 3$ . . . . .	19
5.1	Model $(n, k)$ konvolucijskog koda . . . . .	24
5.2	Konvolucijski koder $(3, 2, 2)$ . . . . .	25
5.3	Konvolucijski koder $(2, 1, 2)$ . . . . .	26
5.4	Dijagram stanja konvolucijskog koda $(2, 1, 2)$ . . . . .	26
5.5	Kodna rešetka konvolucijskog koda $(2, 1, 2)$ . . . . .	30
5.6	Dekodiranje konvolucijskog koda $(2, 1, 2)$ pomoću kodne rešetke . . . . .	30

6.1	Model komunikacijskog sustava sa šumom u komunikacijskomka- nalu . . . . .	32
6.2	Prijamni signal na kojeg je djelovao šum . . . . .	32
6.3	Blok shema optimalnog prijammnika. . . . .	33
6.4	Primjer elementarnih signala zaprijenos simbola 0 i 1. . . . .	34
6.5	Primjer elementarnih signala zaprijenos simbola 0 i 1. . . . .	34

# Popis tablica

5.1	Tablica stanja . . . . .	26
-----	--------------------------	----

## Uvod

Vježbe će se održavati u sljedećim terminima:

- ▷ Srijeda, grupa A u 13:15 - 14:45 (lab. B525)
- ▷ Srijeda, grupa B u 14:45 - 16:15 (lab. B525)

### **Važne napomene:**

- ▷ Prisustvovanje vježbama je obavezno
- ▷ Na početku svake vježbe održati će se kratki kolokvij.
- ▷ Tijekom odrađivanja vježbe piše se izvještaj koji se na kraju vježbe predaje

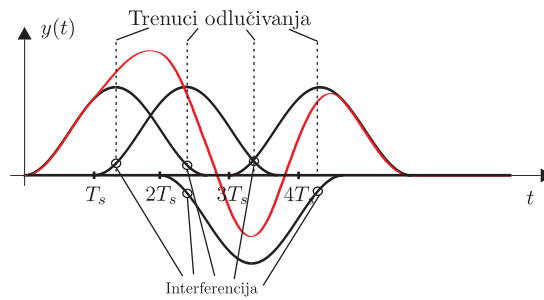
# Vježba 1

## Dijagram oka

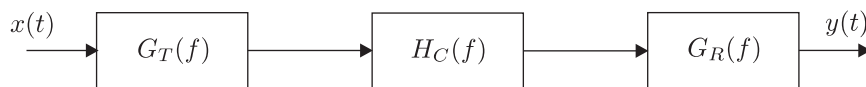
Spektralna analiza pravokutnih signala pokazuje da takvi signali zauzimaju vrlo širok pojas frekvencija. Modulacijom sinusnog signala pravokutnim signalom dobivaju se modulirani signali vrlo velike širine pojasa, što predstavlja problem u izvedbi realnih komunikacijskih sustava jer se javlja međusobni utjecaj među kanalima s frekvencijskom podjelom. Zato je potrebno ograničiti širinu pojasa moduliranog signala. To se postiže filtriranjem moduliranog signala, ali i ograničavanjem pojase širine digitalnoga modulacijskog signala. Filtriranjem pravokutnog modulacijskog signala u osnovnom pojasu frekvencija (*oblikovanje signala*) gubi se pravokutni oblik signala. Pri tome se signal javlja i izvan pripadajućeg mu vremenskog intervala, pa time utječe na dijelove signala koji pripadaju susjednim digitalnim znakovima. Ova pojava utjecaja dijela signala, koji odgovara jednom znaku na drugi dio signala, koji odgovara drugom znaku se naziva *interferencija među simbolima* (*ISI - Intersymbol Interference*). Na slici (1.1) je prikazan primjer interferencije u prijamnom signalu, predajnik je odaslao niz 1101 s bipolarnom signalizacijom.

Postavlja se pitanje, kako oblikovati signal, odnosno ograničiti frekvencijski pojas koji zauzima, tako da u prijamniku nema interferencije među simbolima, vodeći pri tom računa i o prijenosnoj funkciji komunikacijskog kanala. Na slici 1.2 prikazana je blok shema komunikacijskog sustava u osnovnom pojasu. Filtar za oblikovanje impulsa u predajniku je označen s  $G_T(f)$ , prijenosna funkcija komunikacijskog kanala je  $H_C(f)$ , a filtar u prijemniku je  $G_R(f)$ . Ukupna prijenosna funkcija je  $H(f) = G_T(f)H_C(f)G_R(f)$ , odnosno u vremenskom području  $h(t) \Leftrightarrow H(f)$ .

Neka je ukupna prijenosna funkcija u frekvencijskom području idealni filtar, gornje granične frekvencije  $f_0$ , čija je prijenosna funkcija u frekvencijskom



Slika 1.1: Primjer interferencije u prijemnom signalu.

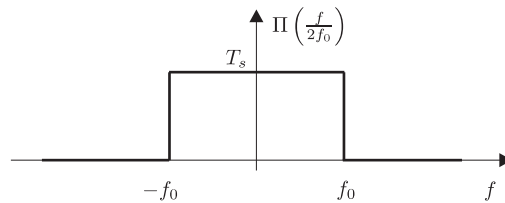


Slika 1.2: Blok shema komunikacijskog sustava u osnovnom pojasu.

području (vidi sl. 1.3)

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_0}\right) = \begin{cases} T_s, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

gdje je  $\Pi(\cdot)$  oznaka za pravokutni impuls: Dalje, neka se na ulaznim priključni-



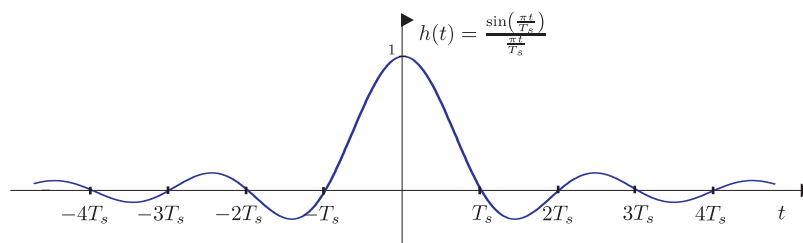
Slika 1.3: Pravokutni filtar

cama tog filtra dovede pravokutni impuls vrlo kratkog trajanja (Diracova delta funkcija,  $\delta(t)$ ). Valni oblik signala na izlaznim priključnicama filtra odgovara impulsnom odzivu koji se izračunava inverznom Fourierovom transformacijom (IFT).

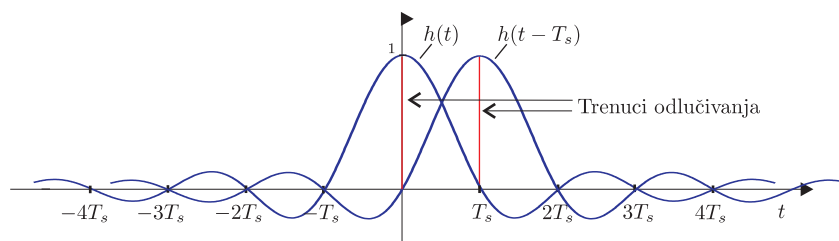
$$h(t) = \text{IFT}\{|H(f)|\} = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}} \equiv \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \quad (1.2)$$

Valni oblik impulsnog odziva (sl. 1.4) pokazuje da se impuls sa ulaza filtra proširio na beskonačni vremenski interval. Zato među simbolima nastaje interferencija. Nul - točke izlaznoga signala se pojavljuju u trenucima  $t_0 = k/(2f_0)$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  te su ekvidistantne, i simetrično raspoređene oko vremenske točke u kojoj se javlja maksimum. Ako se drugi delta impuls na ulazu filtra pojavi





Slika 1.4: Odziv pravokutnog filtra

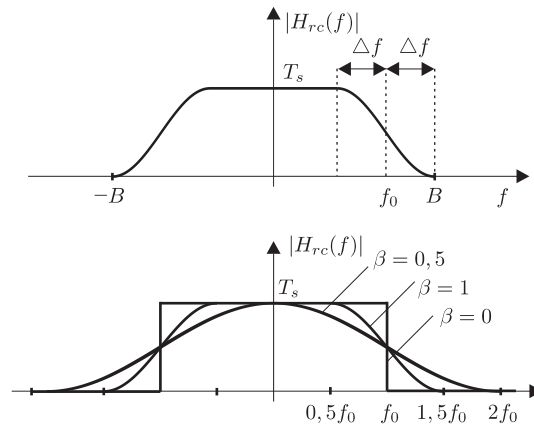


Slika 1.5: Odziv pravokutnog filtra na dva delta impulsa koji nailaze u razmaku  $t_0 = 1/(2f_0)$

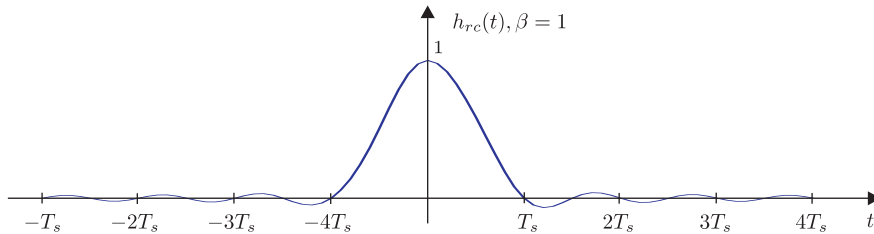
nakon vremena koje je jednako  $T_s = t_0 = 1/(2f_0)$ , onda se maksimum pripadajućeg izlaznog signala iz filtra javlja u trenutku nul - točke odziva filtra na prvi impuls (sl. 1.5). U trenucima pojave maksimuma, odnosno u trenucima odlučivanja o predajnom signalu nema međusobnog utjecaja tih dvaju odziva, tj. nema interferencije među simbolima. Može se zaključiti da pri pojavljivanju delta impulsa s periodom  $t_0 = 1/(2f_g)$  na ulaznim priključnicama idealnog filtra na izlazu nema međusobnog utjecaja među odgovarajućim izlaznim signalima. Prema tome, idealni filtar granične frekvencije  $f_0$  omogućuje prijenos  $2f_0$  simbola u sekundi bez interferencije među njima. Nyquist je 1928 godine došao do ovog zaključka, i to je *Nyquistov teorem*. U skladu s time uvodi se pojam Nyquistove brzine  $r_N = 2f_0 = 2B$ , gdje je  $B$  pojasna širina filtra.

U praksi nije moguća realizacija niskopropusnog filtra s idealno pravokutnom frekvencijskom prijenosnom karakteristikom amplitude. U tom slučaju jedan od mogućih filtara je podignuti kosinus (sl. 1.6) čija je prijenosna karakteristika:

$$H_{rc}(f) = \begin{cases} T_s & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi T_s}{\beta} \left( |f| - \frac{1-\beta}{2T_s} \right) \right] \right\} & \frac{1-\beta}{2T_s} < |f| \leq \frac{1+\beta}{2T_s} \\ 0 & \frac{1+\beta}{2T_s} < |f| \end{cases} \quad (1.3)$$



Slika 1.6: Frekvencijska karakteristika filtra tipa podignuti kosinus

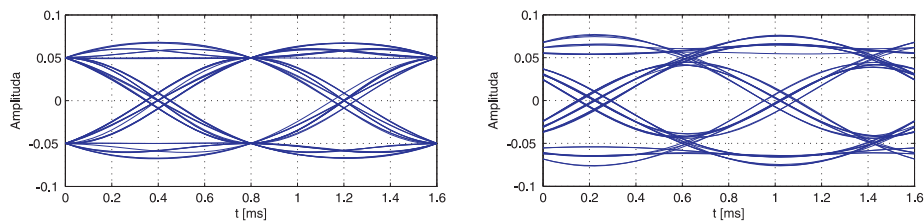


Slika 1.7: Odziv u vremenskom području filtra tipa podignuti kosinus

$$\begin{aligned}
 h_{rc}(t) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \cos\left(\frac{\pi \beta t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s} \left[1 - \left(\frac{2\beta t}{T_s}\right)^2\right]} \\
 &= \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi \beta t}{T_s}\right)}{1 - \left(\frac{2\beta t}{T_s}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ako se za oblikovanje impulsa koristi filtar tipa podignuti kosinus, a budući je  $f_0 = 1/(2T_s)$ , brzina prijenosa  $r_s = 2f_0$  što slijedi iz slike 1.7, međutim pojasna širina nije  $f_0$  nego je uvećana za  $\Delta f$  (slika 1.6) odnosno  $B = (1 + \beta)f_0$  te vrijedi da je  $\beta = \Delta f/f_0$ .

Do interferencije dolazi ako brzina prijenosa u simbolima nije odgovarajuća s obzirom na odziv filtra za oblikovanje signala. Veličina interferencije u digitalnom komunikacijskom sustavu se može vidjeti na *dijagramu oka* koji se može dobiti pomoću osciloskopa. Na stezaljke vertikalnog otklona se dovede prijamni signal  $y(t)$  (slika 1.1), a na horizontalni pilasti signal frekvencije  $1/T_s$ . Ono što se vidi na osciloskopu je dijagram oka (slika 1.8). U slučaju kada nema interferencije među simbolima, u trenutku odlučivanja signal ne fluktuirá (slika 1.8 lijevo u trenutku  $t = 0,8$  ms), a ako postoji interferencija onda amplituda pri-



Slika 1.8: Primjer dijagrama oka bez interferencije (lijevo) i s interferencijom (desno)

jamnog signala fluktuiraju oko neke vrijednosti (slika 1.8 desno u trenutku  $t = 0,65$  ms). Postojanje interferencije zatvara oko i povećava nepouzdanost odlučivanja u prisustvu šuma. Sustav je osjetljiviji i na grešku u sinkronizaciji.

## 1.1 Zadaci

**Zadatak 1.1.** Ako je brzina prijenosa podataka 9600 bit/s, odrediti faktor zaobljenja filtra tipa podignuti – kosinus ako se podaci prenose 4-QAM sustavom u osnovnom pojasu komunikacijskim kanalom gornje granične frekvencije 4000 Hz.

**Zadatak 1.2.** U simulinku modelirati sustav u osnovnom pojasu, na način da je ukupni odziv predajnog i prijamnog filtera isti kao i odziv filtra tipa podignuti kosinus s faktorom zaobljenja dobivenim u prvom zadatku. Prijenosna funkcija kanala u frekvencijskom području je ravna.

**Zadatak 1.3.** Skicirati i objasniti izgled dijagrama oka ako je brzina u simbolima na ulazu u skladu s brzinom iz 1. zadatka, za 4-QAM sustav i za 16-QAM sustav

**Zadatak 1.4.** Ponoviti zadatak 1.3 ako se Nyquistova frekvencija filtra smanji za 5 %.

## 1.2 Izvještaj

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

Broj indeksa: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

1. Ako je brzina prijenosa podataka 9600 bit/s, odrediti faktor zaobljenja filtra tipa podignuti – kosinus ako se podaci prenose 4-QAM sustavom u osnovnom pojasu komunikacijskim kanalom gornje granične frekvencije 4000 Hz.

2. U simulinku modelirati sustav u osnovnom pojasu, na način da je ukupni odziv predajnog i prijamnog filter isti kao i odziv filtra tipa podignuti kosinus s faktorom zaobljenja dobivenim u prvom zadatku. Prijenosna funkcija kanala u frekvencijskom području je ravna.

3. Skicirati i objasniti izgled dijagrama oka ako je brzina u simbolima na ulazu u skladu s brzinom iz 1. zadatka, za 4 – QAM sustav i za 16 – QAM sustav

4. Ponoviti zadatak 1.3 ako se Nyquistova frekvencija filtra smanji za 200 [Hz].

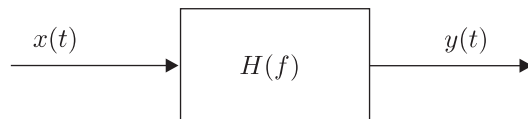
## Vježba 2

# Ekvalizacija

U digitalnim telekomunikacijskim sustavima komunikacijski kanal uzrokuje pojavu interferencije među simbolima (ISI), odnosno utjecaj prethodnih i budućih simbola na simbol o kojem se odlučuje. Pomoću osciloskopa na dijagramu oka (vidi vježbu dijagram oka) može se vidjeti koliki je je utjecaj interferencije među simbolima. ISI otežava odlučivanje simbola, pogotovo kod nestacionarnih kanala, kod kojih je odziv promjenjiv u vremenu što je karakteristično za brzične mobilne sustave. Za otklanjanje utjecaja prethodnih i budućih impulsa na odlučivanje o tekućem simbolu koristi se ekvalizator. Postoje linearni i nelinearni ekvalizatori. Na slici 2.1. prikazana je blok shema komunikacijskog kanala, s prijenosnom funkcijom u frekvencijskom području:

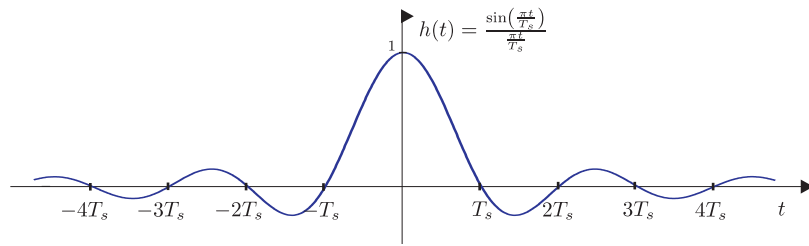
$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_0}\right) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

gdje je  $\Pi(\cdot)$  oznaka za pravokutni impuls čiji odziv je prikazan na sl. 2.2. Ako je brzina ulaznog slijeda impulsa je takva da sljedeći simbol nailazi u trenutku  $kT_s = k/(2f_0)$ , onda ne dolazi do interferencije među simbolima. Na sl. 2.3 je

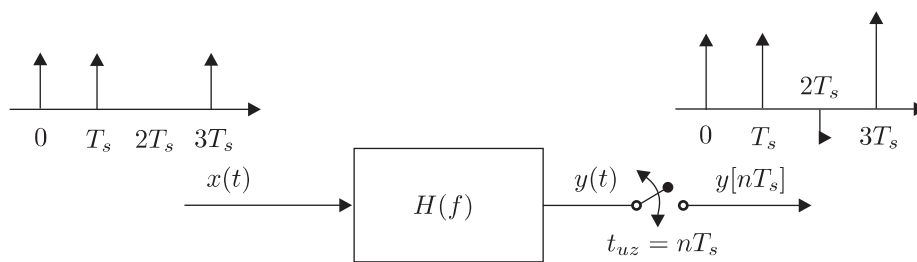


Slika 2.1: Model komunikacijskog kanala

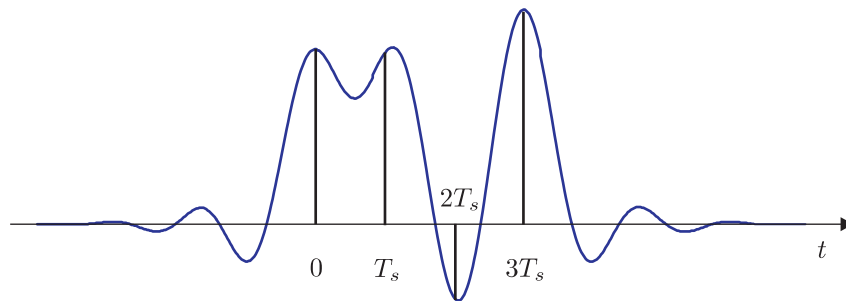
prikazan sustav a na sl. 2.4 valni oblik odziva tog sustava za ulazni niz 1101 u slučaju unipolarnog signaliziranja gdje je interval signalizacije  $T_s = 3/(4f_0)$ . Na sl. 2.3 je na izlazu naznačena sklopka kojom se definiraju trenuci uzorkovanja  $t_{uz} = nT_s$  odnosno trenuci u kojima prijammnik odlučuje primljeni simbol. Interval signalizacije je vremenski interval između dva susjedna simbola, odnosno



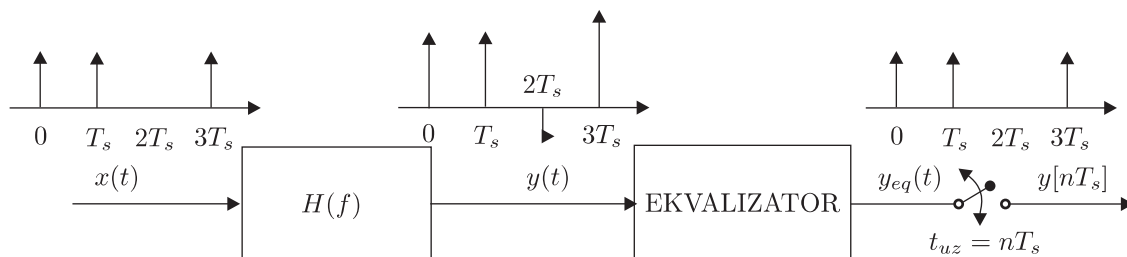
Slika 2.2: Odziv pravokutnog filtra



Slika 2.3: Komunikacijski sustav s pravokutnim filtrom kao prijenosnom funkcijom i interferencijom u odzivu



Slika 2.4: Valni oblik odziva komunikacijskog sustava s interferencijom



Slika 2.5: Valni oblik odziva komunikacijskog sustava s interferencijom

brzina prijenosa u simbolima po sekundi je recipročna vrijednost intervala signalizacije tj.  $r_s = 1/T_s$  [simbola/s].

Također su naznačeni trenuci u kojima se odlučuje o simbolima. U trenutku u kojem se odlučuje o npr. trećem simbolu tj. 0 vrijednost amplitude nije 0, već je neka negativna vrijednost, a to je posljedica utjecaja simbola 11 koji su poslani prije 0 u kanal i simbola 1 koji je poslan nakon 0. Dakle iz vrijednosti signala u trenucima odlučivanja u prijemu jasno je da je odziv neujednačen. Ujednačenost odziva postiže se ekvalizacijom signala (sl. 2.5) prije odlučivanja. To znači da konvolucija odziva kanala i odziva ekvalizatora daje jedan impuls u trenutku odlučivanja, a u svim ostalim trenucima odziv mora biti 0.

Dvije su osnovne metode pomoću kojih se mogu izračunati koeficijenti ekvalizatora: *automatska sinteza*, i *adaptivna metoda*. Kod metode automatske sinteze ekvalizator uspoređuje primljeni referentni signal u vremenskom području s pohranjenom kopijom takvog signala, ali neizobličenom. Na ovaj način radi ZFE (*Zero - Forcing Equalization*). Adaptivna metoda nastoji smanjiti grešku signala na temelju razlike između izlaza ekvalizatora i procjenjene vrijednosti prenošenog signala.

**ZFE - Zero Forcing Ekvalizator)** Jedna od metoda proračuna koeficijenata ekvalizatora je i ZFE. Komunikacijskim kanalom prenosi se unaprijed definirani signal, čime se zapravo dobiva odziv kanala na temelju kojeg se procjenjuju parametri ekvalizatora.

**ZFE algoritam** Prvo se definira vektor odziva kanala,  $\mathbf{h}$ . Za to je potrebno  $2N - 1$  uzoraka (broj uzoraka odziva mora biti neparan, i veći od 3). Neka su  $h_0, h_1 \dots h_{2N-2}$  uzorci odziva.

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1 \dots h_{2N-2}] \quad (2.2)$$

Zatim se definira matrica  $PR$ , pomoću vektora uzoraka.

$$PR = \begin{bmatrix} h_{N-1} & h_{N-2} & \dots & h_0 \\ h_N & h_{N-1} & \dots & h_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{2N-2} & h_{2N-3} & \dots & h_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

U idućem koraku izračuna se inverzna matrica od matrice  $PR$ ,

$$PREQ = PR^{-1} \quad (2.4)$$

Koeficijenti ekvalizatora  $\mathbf{c}$  su članovi središnjeg stupca matrice  $PREQ$ .

$$\mathbf{c} = PREQ(i, j), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = (N + 1)/2 \quad (2.5)$$



## 2.1 Zadaci

**Zadatak 2.1.** Brzina prijenosa za 4-QAM modulacijski postupak je 9600 [bit/s]. Neka su u predajniku i prijamniku primjenjeni filtri tipa podignuti kosinus za oblikovanje signala, te neka je frekvencija pri kojoj je gušenje 6 [dB] ( $f_0$ ) jednaka 2200 [Hz]. Postoji li interferencija među simbolima? Objasniti.

**Zadatak 2.2.** Odrediti ukupni diskretni odziv filtera u predajniku i prijamniku za parametre iz zadatka 2.1.

**Zadatak 2.3.** Izračunati koeficijente ekvalizatora (ZFE ekvalizator) i simulacijom provjeriti točnost izračunatih koeficijenata. Usporediti ekvalizirani odlučeni signal s neekvaliziranim.

## 2.2 Izvještaj

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

Broj indeksa: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

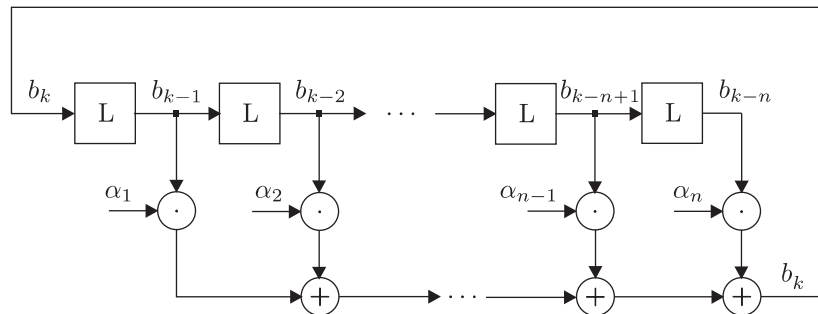
1. Brzina prijenosa za 4-QAM modulacijski postupak je 9600 [bit/s]. Neka su u predajniku i prijammniku primjenjeni filtri tipa podignuti kosinus za oblikovanje signala, te neka je frekvencija pri kojoj je gušenje 6 [dB] ( $f_0$ ) jednaka 2200 [Hz]. Postoji li interferencija među simbolima? Objasniti.
2. Odrediti ukupni diskretni odziv filtera u predajniku i prijammniku za parametre iz zadatka 2.1.
3. Izračunati koeficijente ekvalizatora (ZFE ekvalizator) i simulacijom provjeriti točnost izračunatih koeficijenata. Usporediti ekvalizirani odlučeni signal s neekvaliziranim.

## Vježba 3

# Skrembliranje

U prijenosu podataka duže sekvence nula i jedinica mogu se nepovoljno odraziti na sinkronzaciju u prijammniku. Osim toga ponavljanje određene kombinacije nula i jedinica (periodični signal) u spektru rezultira pojavom diskretnih komponenti, što je nepoželjno. Ovi problemi se rješavaju skrembliranjem.

Skrembliranje je postupak kodiranja primjenjen u predajniku kojim se želi postići što slučajnija izmjena nula i jedinica, odnosno želi se postići statistička neovisnost izvora i toka podataka u kanalu. U prijammniku skrembliranu sekvencu treba deskremblirati, pa se za taj postupak koristi deskrembler. Skrembler se fizički realizira pomoću *posmačnih registara* (elementi za kašnjenje), čija je opća blok shema prikazana na sl. 3.1. Niz nula i jedinica ulazi u skrembler na ulaz



Slika 3.1: Blok shema skremblera

$(b_k)$ , te se u idućem taktu pomiču za jedno mjesto na desno. Izlaz iz skremblera u određenom trenutku se dobiva zbrajanjem po modulu 2 izlaza iz registara pomoženih s pripadnim koeficijentom. Koeficijenti  $\alpha$  mogu biti 0 ili 1. Izraz za skremblirani niz u  $k$ -tom trenutku je:

$$b_k = \alpha_1 b_{k-1} \oplus \alpha_2 b_{k-2} \oplus \dots \oplus \alpha_n b_{k-n} \quad (3.1)$$

gdje je  $\oplus$  oznaka za zbrajanje pomodulu 2, odnosno:

$$x_1 \oplus x_2 = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 \\ 1, & x_1 \neq x_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

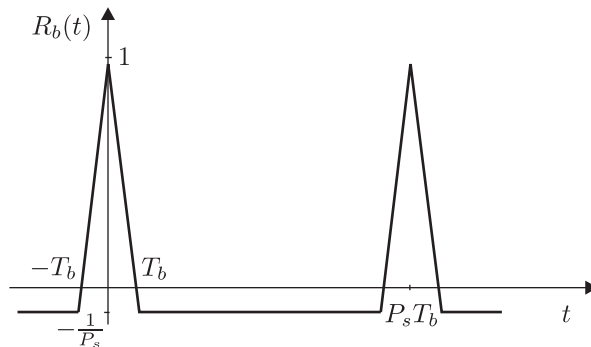
Operacija zbrajanja po modulu 2 može se realizirati pomoću logičkih vrata isključivo ILI u slučaju kada argumenti funkcije mogu poprimiti vrijednosti 0 ili 1. Učinkovitost skremliranja ovisi o odabiru koeficijenta  $\alpha$  (sl. 3.1). Treba imati u vidu da je uvijek moguća ulazna sekvenca koja će na izlazu iz skremlera rezultirati nizom nula ili jedinica, međutim vjerojatnost pojave takve sekvence je jako mala.

Ako posmaćni registri imaju u  $k = 0$  neke početne vrijednosti, a izlaz iz skremlera dovedemo na ulaz, tada skremler radi kao generator periodičnih sekvenci. Općenito najduži period u ciklusima (taktovima) koji se može postići sa skremlerom koji ima  $N$  posmaćnih registara je:

$$P_s = 2^N - 1 \quad (3.3)$$

Odnosno period je  $T_s = P_s T_b$  sekundi, gdje je  $T_b$  trajanje bita u sekundama. To je maksimalna duljina pseudošumne sekvence (PN sekvenca), pa izbor koeficijenta  $i$  treba biti takav da se postigne maksimalan period. Naziv pseudošumna sekvenca dolazi iz korelacijskih svojstava PN sekvence, odnosno autokorelacija treba što više sličiti delta impulsu (sl. 3.2). Autokorelacija je periodična, jer je period PN sekvence konačan.

Ako se na skremler maksimalnog perioda ( $P_s = 2^n - 1$ ), dovede periodični signal perioda  $M$ ), može se pokazati da će ukupni period biti  $M$  ili najmanji zajednički višekratnik od  $M$  i  $N$ , što ovisi o početnim stanjima u memorijskim elementima. Za slučaj u kojem su  $M$  i  $N$  relativno prosti ukupan period će biti  $MN$ .



Slika 3.2: Autokorelacija pseudošumne sekvence

### 3.1 Zadaci

**Zadatak 3.1.** U simulinku modelirati skrembler s 3 posmična registra i koeficijentima  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  i  $\alpha_3 = 1$ . Na ulaz dovesti digitalni signal (0, 1) duljine 40 bita kojemu je prvi bit 1, a ostali 0. Skicirati shemu skremblera. Odrediti period izlaznog niza. Komentirati dobiveni rezultat.

**Zadatak 3.2.** Modelirati skrembler s 3 posmična registra, kojemu su koeficijenti  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$  i  $\alpha_3 = 1$ . Na ulaz dovesti digitalni signal (0, 1) duljine 40 bita kojemu je prvi bit 1, a ostali 0. Odrediti period izlaznog niza. Komentirati dobiveni rezultat.

**Zadatak 3.3.** Na ulaz dovesti signal duljine 40 bita kojemu je period 4 bita. Odrediti period izlaznog niza. Ispitati i komentirati što je s periodom ako se mijenjaju početna stanja memorijskih elemenata (provjeriti sva stanja).

## 3.2 Izvještaj

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

Broj indeksa: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

1. U simulinku modelirati skrembler s 3 posmična registra i koeficijentima  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  i  $\alpha_3 = 1$ . Skicirati shemu. Na ulaz dovesti digitalni signal (0, 1) duljine 40 bita kojemu je prvi bit 1, a ostali 0. Skicirati shemu skremblera. Odrediti period izlaznog niza. Komentirati dobiveni rezultat.
  
2. Modelirati i skicirati skrembler s 3 posmična registra, kojemu su koeficijenti  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$  i  $\alpha_3 = 1$ . Na ulaz dovesti digitalni signal (0, 1) duljine 40 bita kojemu je prvi bit 1, a ostali 0. Odrediti period izlaznog niza. Komentirati dobiveni rezultat.
  
3. Na ulaz dovesti signal duljine 40 bita kojemu je period 4 bita. Odrediti period izlaznog niza. Ispitati i komentirati što je s periodom ako se mijenjaju početna stanja memorijskih elemenata (provjeriti sva stanja).

## Vježba 4

# Redundantno kodiranje: Blok kodovi

Jedno od temeljnih pitanja u uspostavi komunikacijskog sustava jest kvaliteta usluge s čime je direktno povezana pouzdanost prijenosa, odnosno vjerojatnost nastanka pogreške. Shannon je pokazao (*Shannonov teorem*) da postoji kôd kojim se može postići prijenos sa po volji malom vjerojatnošću pogreške preko komunikacijskog kanala sa šumom ako je brzina prijenosa  $R$  manja od kapaciteta komunikacijskog kanala  $C$ . Međutim, teorem samo kaže da postoji kôd, međutim ne govori ništa o načinu konstrukcije koda. Dakle jasno je da je jedini način kojim se sustav može približiti Shannonovoj granici upotreba redundantnog kodiranja. Postoje tri osnovne grupe kodova:

- ▷ Blok kodovi
- ▷ Konvolucijski kodovi
- ▷ Trellis kodovi

U ovoj vježbi biti će ukratko opisani *Hammingovi kodovi* koji spadaju u grupu blok kodova. Osnovna ideja kodiranja je dodavanje redundantnih simbola (zalihosnih) osnovnoj poruci, te na taj način prekodirati poruku da je u prijammniku moguće detektirati grešku i korigirati je. Blok kodovima i konvolucijskim kodovima se na taj način ruši učinkovitost sustava jer se osim poruke prenose i redundantni simboli koji ne nose informaciju. Trellis kodiranjem se ne ruši učinkovitost jer se kodiranje obavlja u prostoru signala. Mogućnost korekcije ovisi o broju kontrolnih simbola, ali i o kodu, odnosno o načinu na koji su redundantni simboli iskorišteni.

Blok kodovi se generiraju tako da se svakoj ulaznoj poruci od  $k$  informacijskih simbola (najčešće bitova) doda  $c$  kontrolnih simbola (bitova). Na taj način se konstruira  $(n, k)$  blok kod gdje je  $n = k + c$ . Način na koji kôd ima

mogućnost ispravljanja grešaka je najjednostavnije interpretirati geometrijskim putem. Prije toga je potrebno uvesti pojam *Hammingove težine* i *Hammingove distance*. Hammingova težina kodne riječi  $w(s_i)$  je definirana kao broj jedinica u toj kodnoj riječi. Hammingova distanca između kodnih riječi  $d_H(s_i, s_j)$  je definirana kao broj mjesta u kojem se te dvije kodne riječi razlikuju. Jednostavno je pokazati da se Hammingova distanca može izračunati poču Hammingovih težina:

$$d_H(s_i, s_j) = w(s_i \oplus s_j) \quad (4.1)$$

gdje je  $\oplus$  oznaka za zbrajanje po modulu 2.

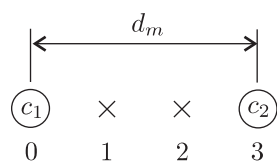
**Primjer 4.1.** Neka su zadane kodna riječ  $s_1 = 10110010$  i  $s_2 = 11010101$ . Treba izračunati Hammingove težine i Hammingovu distancu.

**Rješenje.** Hammingove težine su:  $w(s_1) = 4$ , odnosno  $w(s_2) = 5$ , a Hammingova distanca  $d_H(s_1, s_2) = w(s_1 \oplus s_2) = w(10110010 \oplus 11010101) = w(01100111) = 5$ .

Na sl. 4.1 je shematski prikaz dviju kodnih riječi (proizvoljne duljine) s Hammingovom distancom  $d_H(c_1, c_2) = 3$ . Ako na kodnoj riječi  $c_1$  nastane jedna greška njezin novi položaj će biti namjestu 1. Dakle u smislu Hammingove distance ta novonastala kodna riječ je još uvijek bliža izvornoj kodnoj riječi  $c_1$  nego kodnoj riječi  $c_2$ . Dakle da bi se ispravila greška, kodnu riječ na kojoj je detektirana greška treba dekodirati kao kodnu riječ koja joj je najbliža u smislu Hammingove distance. U praksi kod ima mnogo više od dvije kodne riječi, međutim princip ispravljanja grešaka je isti. Dakle kod koji ima minimalnu Hammingovu distancu (u daljnjem tekstu samo distanca) jednaku  $d_m$  može korigirati  $n_c = \frac{1}{2}(d_m - 1)$  bitova. Minimalna Hammingova distanca je najmanji broj koji se dobije ako se ispita ju Hammingove distance svake kodne riječi kôda sa svakom.

### Hamming-ovi blok kodovi

Specijalni slučaj blok kodova su  $(2^{n-k}, k)$  tzv. Hamming-ovi kodovi. To su linearni blok kodovi s distancom  $d_m = 3$  koji mogu korigirati jednu grešku. Broj korekcija ( $n_c$ ) jednak je  $n_c = \frac{1}{2}(3 - 1) = 1$ . Hammingova distanca za neki kod



Slika 4.1: Geometrijsko predstavljanje dviju kodnih riječi Hammingove distance  $d_H = 3$



općenito se svodi, kao što je već recčeno, na određivanje minimalne udaljenosti između svih izlaznih  $n$ -torki što često nije jednostavan zadatak. Jednostavnije rješenje za linearni  $(n, k)$  kod je preko minimalne Hammingove težine. Tako se određivanje Hammingove distance, a time i broja mogućih korekcija pogrešaka, svodi na traženje kodne riječi s najmanje jedinica (osim kodne riječi koja sadrži sve nule) među svim kodnim riječima kôda. Hammingov kod se može generirati pomoću generator matrice  $\mathbf{G}$  koja za  $(7, 4)$  kod može izgledati:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ovo je generator matrica  $\mathbf{G}$  tzv. standardnog oblika (prvih  $k$  stupca čine jediničnu matricu) pomoću koje se generira sistematski linearni kod. Taj kod ima pri postupku dekodiranja korisno svojstvo: informacijski simboli se nalaze na prvih  $k$  mjesta u kodnoj riječi.

Poruka  $\mathbf{v}_i$  (matrica dimenzije  $k \times 1$ ) se kodira u kodnu riječ  $\mathbf{x}_i$  (dimenzije  $n \times 1$ ) množenjem transponiranog vektora poruke s generator matricom:

$$\mathbf{x}_i^T = \mathbf{v}_i^T \mathbf{G}, \quad (\text{mod } 2) \quad (4.3)$$

Ovdje treba napomenuti da se kod zbrajanja elemenata u matricnom množenju zbraja po modulu 2. Za sistematski kod lako je izračunati matricu pariteta  $\mathbf{H}$  na račun strukture matrice  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I} : \mathbf{D}] \quad \mathbf{H} = [-\mathbf{D}^T : \mathbf{I}] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Dekodiranje se vrši izračunavanjem vektora  $\mathbf{s} = \mathbf{H}\mathbf{y}$  koji se naziva sindrom ili korektor, a  $\mathbf{y}$  je primljeni vektor. U slučaju kada je  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ , odnosno nul vektor, tijekom prijenosa nije nastupila jednostruka greška. Ako tijekom prijenosa nastupi jedna greška, pomoću sindroma, koji je sad različit od nule, može se jednoznačno odrediti i ispraviti. Važno je napomenuti da uz broja grešaka veći od jedan dolazi do naglog pada kvalitete prijenosa pa je bolje u tom slučaju ne koristiti ovakvu kontrolu grešaka.

## 4.1 Zadaci

### Zadatak 4.1.

Za kod definiran generator matricom:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

ispisati sve kodne riječi, i odrediti hammingovu distancu.

**Zadatak 4.2.** Odabрати proizvoljnu kodnu riječ duljine četiri bita, i kodirati generator matricom definiranom u prvom zadatku.

**Zadatak 4.3.** Izračunati matricu pariteta  $\mathbf{H}$ , i dekodirati kodiranu riječ iz prvog zadatka.

**Zadatak 4.4.** Proizvoljno invertirati bilo koji bit (simulacija greške u prijenosu) kodirane riječi (iz prvog zadatka), i takvu kodnu riječ dekodirati.

**Zadatak 4.5.** Koji stupac matrice pariteta je isti kao i sindrom.

## 4.2 Izvještaj

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

Broj indeksa: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

1. Za kod definiran generator matricom:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

ispisati sve kodne riječi, i odrediti hammingovu distancu.

2. Odabrati proizvoljnu kodnu riječ duljine četiri bita, i kodirati generator matricom definiranom u prvom zadatku.

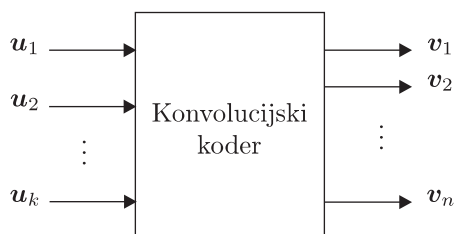


## Vježba 5

# Redundantno kodiranje: Konvolucijski kodovi

Za razliku od blok kodova koji se realiziraju pomoću sustava bez memorije, konvolucijski kodovi (definirani polinomima  $\mathbf{g}_j^{(i)}$ ) se generiraju pomoću sustava s memorijom. Kodna riječ ( $n$ -toraka) na izlazu konvolucijskog koda ne ovisi samo o trenutnoj ulaznoj poruci ( $k$ -torci) već i o prethodnim porukama koje su pohranjene u memoriji koda. Standardna oznaka za binarni konvolucijski kod je  $(n, k, m)$  gdje je  $n$  broj bitova ( $n$ -torke) koji se generiraju na izlazu koda ako se na ulaz dovede  $k$  bitova, a  $m$  je *veličina memorije* odnosno broj  $k$ -torci prethodno pohranjenih u memoriji. Prednost konvolucijskih kodova je u tome što je za male iznose  $n$  i  $k$  (do 4) implementacija ovakvih kodova jednostavna i prostorno vrlo mala što ove kodove čini pogodnim za primjenu u satelitskim komunikacijama. U primjeni su najznačajniji binarni konvolucijski kodovi, što se u daljnjem tekstu neće posebno naglašavati.

Konvolucijski koder se može predstaviti pomoću *linearnog, vremenski invarijantnog sustava* (LTI – *linear time-invariant system*). Invarijantnost se odnosi na nepromjenjivost prijenosne funkcije koje opisuju ovisnost izlaza o ulazu sl. 5.1. Ulaz  $\mathbf{u}_i$  i izlaz  $\mathbf{v}_j$  su povezani s prijenosnom funkcijom  $\mathbf{g}_j^{(i)}$  operacijom

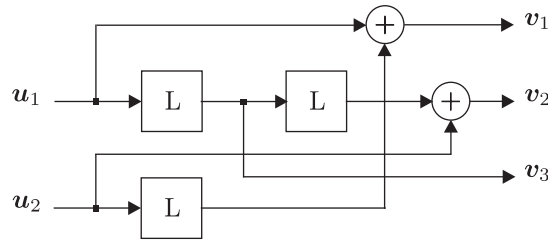


Slika 5.1: Model  $(n, k)$  konvolucijskog koda

konvolucije. Pošto svaki izlaz može ovisiti o svim ulazima, općenito vrijedi:

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{u}_1 * \mathbf{g}_j^{(1)} + \mathbf{u}_2 * \mathbf{g}_j^{(2)} + \dots + \mathbf{u}_k * \mathbf{g}_j^{(k)} = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i * \mathbf{g}_j^{(i)} \quad (5.1)$$

gdje  $*$  označava operaciju konvolucije, a  $\mathbf{g}_j^{(i)}$  impulsni odziv  $i$ -tog ulaza na  $j$ -ti izlaz. Odziv  $\mathbf{g}_j^{(i)}$  se može odrediti na način da se na  $i$ -ti ulaz koderu dovede diskretni impuls  $(1, 0, 0, \dots)$  i promatra odziv na  $j$ -tom izlazu a potom na svim ostalim ulazima treba biti nul-sekvencu  $(0, 0, 0, \dots)$ . Impulsni odzivi se nazivaju *generator sekvence* konvolucijskog koderu. Na sl. 5.2 prikazan je koder  $(3, 2, 2)$  konvolucijskog koda. Generator polinomi su sljedeći:



Slika 5.2: Konvolucijski koder  $(3, 2, 2)$

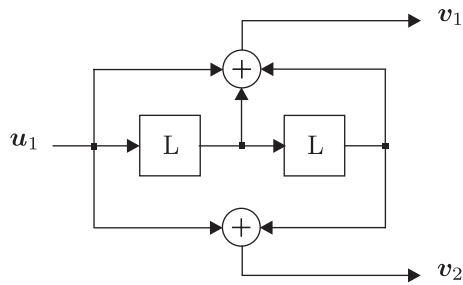
$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1^{(1)} &= (1, 0, 0) & \mathbf{g}_2^{(1)} &= (0, 0, 1) & \mathbf{g}_3^{(1)} &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{g}_1^{(2)} &= (0, 1, 0) & \mathbf{g}_2^{(2)} &= (1, 0, 0) & \mathbf{g}_3^{(2)} &= (0, 0, 0) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Izlazni tok podataka se formira na način da se u seriji uzimaju podaci s izlaza, odnosno u ovom slučaju vrijedi:  $\mathbf{v} = (v_{1,0}, v_{2,0}, v_{3,0}, v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}, \dots, v_{1,L-1}, v_{2,L-1}, v_{3,L-1})$  gdje prvi indeks označava izlaz, a drugi diskretni vremenski interval. Tako npr.  $v_{2,5}$  označava vrijednost na drugom izlazu ( $v_2$ ) u 5-tom vremenskom intervalu. S  $L$  je označena duljina sekvence.

Osim matematičkih relacija kojima je opisana funkcijska ovisnost izlaza o ulazu, moguća je i grafička predodžba rada konvolucijskog koderu pomoću *dijagrama stanja* a koja je značajno preglednija. Koder se može promatrati kao automat koji ima ulaze, izlaze i određeni broj stanja čiji broj je definiran brojem memorijskih elemenata i unutrašnjom strukturom koderu, odnosno realiziranim vezama. Ideja se sastoji u tome da se za svako stanje definira funkcijska ovisnost *prijelaza* i *izlaza* za svaku moguću vrijednost na ulazu. Funkcijom prijelaza je za svako stanje definirano u koje stanje koder prelazi za bilo koji ulaz, a funkcijom izlaza je definirana vrijednost na izlazu za svako stanje i proizvoljan ulaz. Prikaz rada konvolucijskog koderu pomoću dijagrama stanja je ilustrirana za koder prikazan na sl. 5.3.

Koder prikazan na sl. 5.3 ima  $S = 4$  stanja. U dva memorijska elementa mogu se pojaviti četiri kombinacije pri čemu svaki memorijski element može biti

VJEŽBA 5. REDUNDANTNO KODIRANJE: KONVOLUCIJSKI KODOVI 26

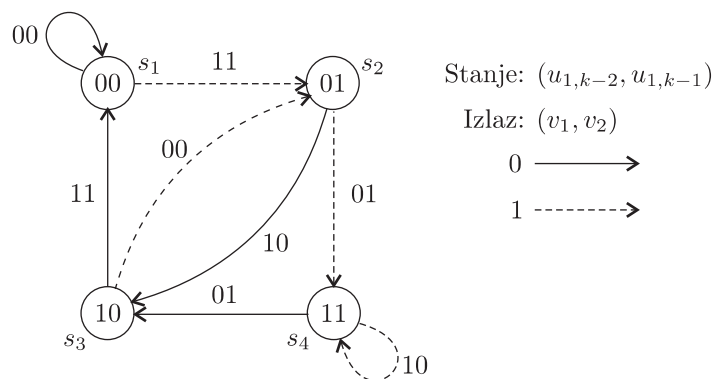


Slika 5.3: Konvolucijski koder (2, 1, 2)

u stanju 0 ili 1. U tablici 5.1 prikazana su moguća stanja navedenog kodera. Pomoću generator sekvenci, promatrajući stanja memorijskih elemenata, ulaze i izlaze može se konstruirati dijagram stanja (sl. 5.4).

Tablica 5.1: Tablica stanja

$i$	$s_i(u_{1,k-2}, u_{1,k-1})$
1	(0, 0)
2	(0, 1)
3	(1, 0)
4	(1, 1)



Slika 5.4: Dijagram stanja konvolucijskog kodera (2, 1, 2)

Osim dijagrama stanja, prikladan grafički prikaz konvolucijskog koda je pomoću *kodne rešetke* koja je posebno prikladna za prikazivanje postupka kodiranja i dekodiranja.

Na sl. 5.5 je prikazana kodna rešetka za kod (2, 1, 2). Postoji više pristupa problemu dekodiranja konvolucijskih kodova kao što je dekodiranje na osnovi *logike većine*, dekodiranje na osnovu *Viterbijevog algoritma* i *sekvencijalno dekodiranje*. Dekodiranje konvolucijskih kodova s Viterbijevim algoritmom zasniva

se na pronalaženju puta minimalne težine prateći u svakom koraku onoliko puteva koliko ima stanja (u našem primjeru 4). Za svaki primljeni par simbola Viterbijev algoritam pridjeljuje težinu putu između dva stanja u skladu s pripadnom Hammingovom distancom. Na sl. 5.6 je prikazano dekodiranje sekvence  $\mathbf{y} = (11\ 01\ 11)$ . Vrijednost pripadne distance je označena ispod, a pripadni par digita iznad linije. Puna linija označava primljenu nulu, a isprekidana jedinicu. Nakon 3 koraka svako od stanja dosegnuto je sa po 2 puta od kojih svaki ima ukupnu težinu označenu masnijom brojkom. Za daljnji rad, Viterbijev dekođer eliminira po jedan od dolaznih puteva u svako od stanja i to onaj veće težine tako da nastavlja dalje pratiti 4 puta.

## 5.1 Zadataci

**Zadatak 5.1.** Odrediti generator polinome za koder prikazan na sl. 5.3

**Zadatak 5.2.** Odabрати proizvoljnu binarnu sekvencu  $\mathbf{u}_i$  duljine 6 bitova, i kodirati je koristeći dijagram stanja prikazan na sl. 5.4. Kodiranje započeti iz stanja 1. Dodati ulaznoj sekvenci minimalno potreban broj bitova tako da dijagram stanja prijeđe u stanje 1.

**Zadatak 5.3.** Koliko bitova je potrebno za prijelaz dijagrama stanja u stanje 1, nakon što se kodira ulazna sekvencu?

**Zadatak 5.4.** Kodiranu sekvencu  $\mathbf{v}$  dekodirati pomoću kodne rešetke (sl. 5.5 i 5.6) na način da se invertiraju proizvoljna 2 bita, što je ekvivalentno nastanku dvije greške u komunikacijskom kanalu.

**Zadatak 5.5.** Usporediti dekodiranu sekvencu  $\hat{\mathbf{u}}$  sa sekvencom  $\mathbf{u}$  i komentirati dobiveni rezultat.

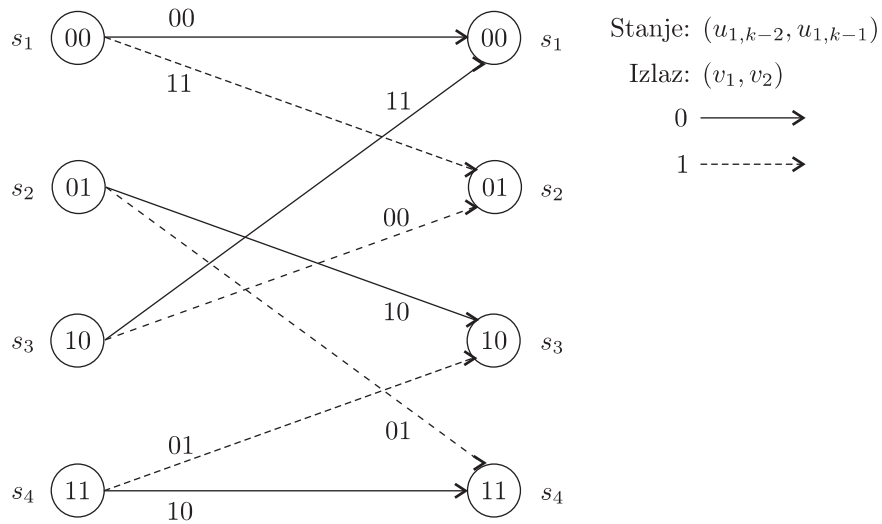




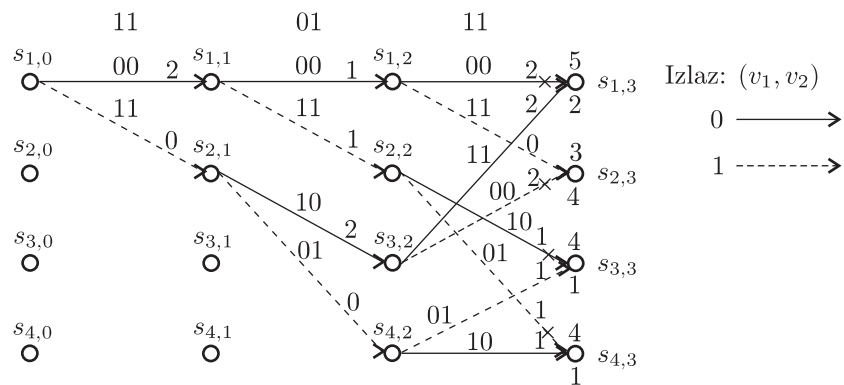
VJEŽBA 5. REDUNDANTNO KODIRANJE: KONVOLUCIJSKI KODOVI 29

5. Usporediti dekodiranu sekvencu  $\hat{u}$  sa sekvencom  $u$  i komentirati dobiveni rezultat.

VJEŽBA 5. REDUNDANTNO KODIRANJE: KONVOLUCIJSKI KODOVI 30



Slika 5.5: Kodna rešetka konvolucijskog kodera  $(2, 1, 2)$



Slika 5.6: Dekodiranje konvolucijskog kodera  $(2, 1, 2)$  pomoću kodne rešetke

## Vježba 6

# Optimalni prijamnik

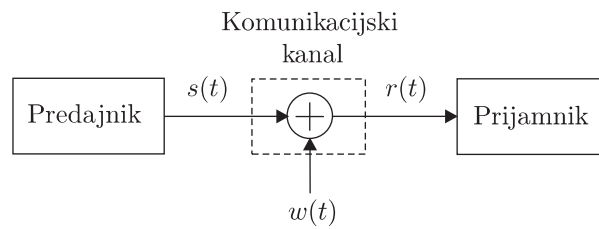
U digitalnom komunikacijskom sustavu, općenito svaki od simbola  $x_n$  kojeg generira izvor  $\mathbf{x} = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$  je u komunikacijskom kanalu reprezentiran s određenim valnim oblikom. Vrijedi da je  $x_n \in \mathbb{X}$ , gdje je  $\mathbb{X}$  je skup svih simbola koje može generirati izvor. Npr. u binarnom sustavu  $\mathbb{X} = \{0, 1\}$ . Predajnik na temelju primljenog signala odlučuje o poslanom simbolu  $\hat{\mathbf{x}} = (\dots, \hat{x}_{-1}, \hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots)$ . Problem u odlučivanju javlja se zbog djelovanja šuma u komunikacijskom kanalu. Ako se primjeni aditivni model šuma, tada se primljeni signal može izraziti kao (sl. 6.1):

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{x_n}(t - nT_s) + w(t) = s(t) + w(t) \quad (6.1)$$

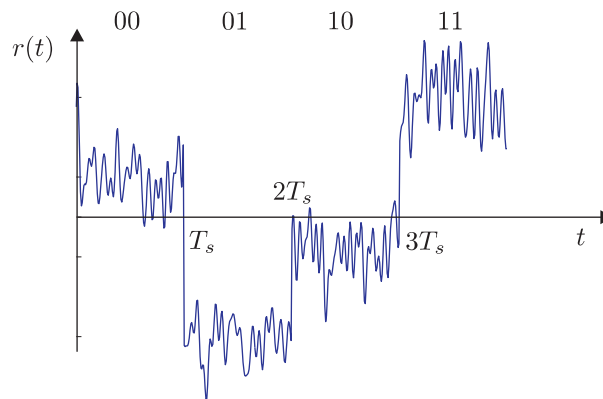
gdje su  $w(t)$  šum,  $s_{x_n}(t)$  valni oblik kojim je reprezentiran  $x_n$ -ti simbol,  $T_s$  je *interval signalizacije*, odnosno brzina u simbolima/s je  $r_s = 1/T_s$ . Interval signalizacije je trajanje simbola. U binarnom sustavu trajanje bita je isto što i trajanje simbola, a općenito vrijedi:  $T_s = mT_b$ , gdje je  $T_b$  trajanje bita, a  $m$  broj bitova s kojim je kodiran pojedini simbol. Vrijedi da je  $m = \text{ld}(M)$ , gdje je  $M$  ukupan broj simbola koji može generirati izvor (broj elemenata skupa  $\mathbb{X}$ ). Općenito sustav s  $M$  simbola za prijenos podataka koristi  $M$  *elementarnih valnih oblika* koji se generiraju pomoću modema na temelju ulaznih simbola  $\mathbf{x}$ .

Na sl. 6.2 je prikazan prijamni signal nakojeg je djelovao šum u komunikacijskom kanalu za četverorazinski signal ( $M = 4$ ).

Postoje različiti modeli šuma, međutim posebno je interesantan *aditivni bijeli Gaussov šum* (AWGN). Kanal kod kojeg se šum  $w(t)$  u kanalu zbraja na signal, i čija se amplituda distribuira po Gaussovoj funkciji gustoće vjerojatnosti srednje vrijednosti 0, a spektralna gustoća snage je  $N_0/2$  u cijelom frekvencijskom području zovemo kanal s aditivnim bijelim Gaussovim šumom odnosno AWGN kanal.



Slika 6.1: Model komunikacijskog sustava sa šumom u komunikacijskom kanalu



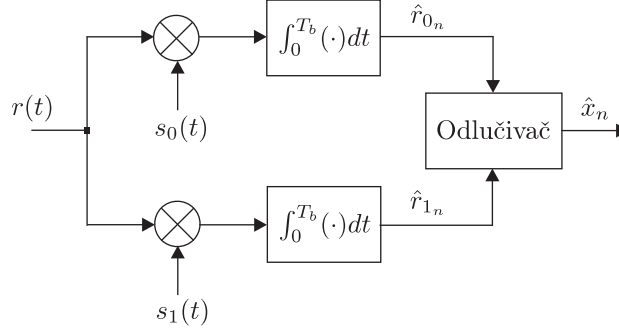
Slika 6.2: Prijamni signal na kojeg je djelovao šum

Zadatak prijamnika je procijeniti za svaki interval signalizacije, koji simbol je poslao predajnik na temelju primljenog valnog oblika  $r(t) = s(t) + w(t)$ , ali tako da vjerojatnost pogreške bude minimalna. U tom slučaju za prijamnik kažemo da je optimalan.

Način rada optimalnog prijamnika će biti objašnjen na primjeru binarnog ( $M = 2$ , odnosno  $\mathbb{X} = \{0, 1\}$ ) komunikacijskog sustava. U binarnom komunikacijskom sustavu podaci koje generira izvor su slijed nula i jedinica. Svaki od simbola je predstavljen s pripadajućim valnim oblikom  $s_0(t)$  i  $s_1(t)$  u komunikacijskom kanalu. Pošto se radi o binarnom komunikacijskom sustavu trajanje simbola je jednaka trajanju bita  $T_s = T_b$ , a brzina prijenosa je  $r_b = 1/T_b$  [bit/s].

### Optimalni prijamnik za AWGN kanal

Optimalni prijamnik (sl. 6.3) ima dva osnovna elementa: *korelator signala* odnosno *ugodeni filter* i *odlučivač*. Korelator signala izračunava korelaciju primljenog signala sa  $s_0(t)$  odnosno  $s_1(t)$ , i na taj način izračuna sličnost primljenog valnog oblika s elementarnim signalima koji predstavljaju simbole 0 i 1. Pret-



Slika 6.3: Blok shema optimalnog prijamnika.

postavlja se da je sinkronizacija idealna.

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_{0_n} &= \int_0^{T_b} r(t) s_0(t) dt \\
 &= \int_0^{T_b} s_{x_n}(t) s_0(t) dt + \int_0^{T_b} w(t) s_0(t) dt = K_{0_n} + \tilde{w}_0 \\
 \hat{r}_{1_n} &= \int_0^{T_b} r(t) s_1(t) dt \\
 &= \int_0^{T_b} s_{x_n}(t) s_1(t) dt + \int_0^{T_b} w(t) s_1(t) dt = K_{0_n} + \tilde{w}_1
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Vrijednost  $K_{0_n}$  i  $K_{1_n}$  mogu imati maksimalnu vrijednost  $\sqrt{E_b}$ , što je korijen energije elementarnog primljenog signala i to samo u slučaju da je primljeni simbol  $s_{x_n}$  isti kao i elementarni signal s kojim se računa korelacija. Pretpostavka je da su energije elementarnih signala  $s_0(t)$  i  $s_1(t)$  jednake 1 tj. vrijedi:

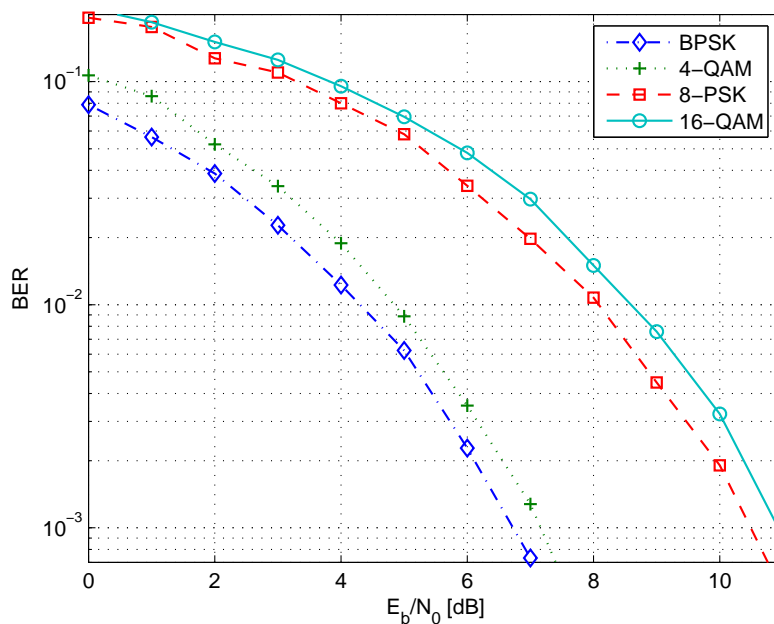
$$\begin{aligned}
 \int_0^{T_b} s_0(t) dt &= 1 \\
 \int_0^{T_b} s_1(t) dt &= 1
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

U svakom drugom slučaju konstante  $K_{0_n}$  i  $K_{1_n}$  imaju manju vrijednost. Dakle, ovisno o tome koji je simbol primljen u pripadajućoj grani u optimalnom prijamniku će biti veća vrijednost.  $\tilde{w}_0$  i  $\tilde{w}_1$  su slučajne varijable koje se distribuiraju po Gaussovoj funkciji gustoće vjerojatnosti, srednje vrijednosti nula i varijance:

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} \tag{6.4}$$

gdje je  $N_0$  spektralna gustoća snage šuma u komunikacijskom kanalu. Odlučivač na temelju vrijednosti  $\hat{r}_{0_n}$  i  $\hat{r}_{1_n}$  dobivenih na izlazu iz korelatora odlučuje o poslanom simbolu  $\hat{x}_n$  na sljedeći način:

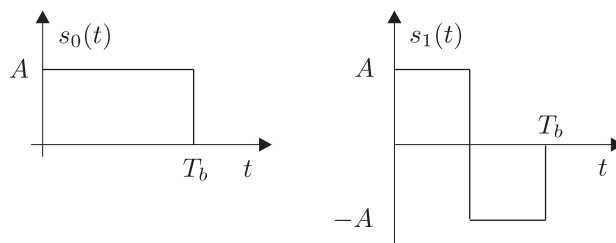
$$\hat{x}_n = \begin{cases} 1, & \hat{r}_{1_n} > \hat{r}_{0_n} \\ 0, & \hat{r}_{1_n} < \hat{r}_{0_n} \end{cases} \tag{6.5}$$



Slika 6.4: Primjer elementarnih signala zaprijenos simbola 0 i 1.

Kada u komunikacijskom kanalu ne bi bilo šuma, odlučivanje bi bilo uvijek točno. Međutim zbog šuma, slučajne varijable  $\tilde{w}_0$  i  $\tilde{w}_1$  mogu imati takve vrijednosti da odlučivač donese pogrešnu odluku. Može se pokazati da su slučajne varijable  $\tilde{w}_0$  i  $\tilde{w}_1$  nekorelirane u praktičnim realizacijama.

Vjerojatnost greške koju sustav može osigurati ovisi o obliku signala  $s_0(t)$  i  $s_1(t)$  kojim su mapirane jedinica i nula, odnosno o korelaciji između njih, i spektralnoj gustoći snage šuma  $N_0$ . Različiti sustavi se kompariraju pomoću krivulja na kojima je prikazan omjer prosječne energije signala koja je potrebna za prijenos jednog bita informacije ( $E_b$ ) i spektralne gustoće snage šuma u kanalu tj.  $N_0$  u decibelima (sl. 6.4) na  $x$  osi i vjerojatnosti greške u logaritamskom mjerilu na  $y$  osi.



Slika 6.5: Primjer elementarnih signala zaprijenos simbola 0 i 1.

## 6.1 Zadaci

**Zadatak 6.1.** Za signale na sl. 6.5 izračunati energiju signala i varijance slučajnih varijabli koje se dobiju na izlazu korelatora signala ( $\hat{r}_0$  i  $\hat{r}_1$ ) u prijamniku prikazanom na sl. 6.3, ako na ulaz dolazi signal koji modulira simbol 0, odnosno 1.

**Zadatak 6.2.** U Matlabu simulirati sustav i grafički prikazati ovisnost vjerojatnosti greške o odnosu energije i spektralne gustoće snage šuma (sl. 6.4).



## 6.2 Izvještaj

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

Broj indeksa: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

1. U Matlabu simulirati sustav i grafički prikazati ovisnost vjerojatnosti greške o odnosu energije i spektralne gustoće snage šuma (sl. 6.4).