

4. Uvod u diferencijalne jednadžbe - 1. dio

1. Provjeriti da li je $\varphi(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $xy + \sqrt{1-x^2} \cdot y' = 0$.
2. Provjeriti da li je $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' = x^2 + y^2$.
3. (a) Za koje nenula vrijednosti od k funkcija $y = \sin(kt)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $y'' + 9y = 0$?
(b) Za dobivene vrijednosti od k provjeriti da li je svaki član familije funkcija $y = A \sin(kt) + B \cos(kt)$ također rješenje.
4. (a) Pokazati da je svaki član familije funkcija $y = ce^{\frac{x^2}{2}}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = xy$.
(b) Odrediti rješenje diferencijale jednadžbe $y' = xy$ koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 2$.
5. Odrediti diferencijalnu jednadžbu za familiju krivulja $y = cx + c^2$.
6. Odrediti diferencijalnu jednadžbu za familiju krivulja $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{4} = 1$.
7. Odrediti krivulju iz familije krivulja $y = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x}$, za koju je $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
8. Odrediti krivulju iz familije krivulja $y = c_1 \sin(x - c_2)$, koja zadovoljava početne uvjete $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 0$.
9. Populacija je modelirana diferencijalnom jednadžbom $\frac{dP}{dt} = 1.2P \left(1 - \frac{P}{4200}\right)$.
 - (a) Za koje vrijednosti od P populacija raste?

- (b) Za koje vrijednosti od P populacija pada?
10. Vijesti se šire gradom tako da je brzina širenja vijesti proporcionalna produktu dijela y stanovništva koji su čuli vijest i dijela stanovništva koji nisu čuli vijest. Gradić ima 1000 stanovnika. U $8h$ 80 ljudi je čulo vijest. Do podne ju je čulo pola grada.
- (a) Napisati diferencijalnu jednadžbu koju zadovoljava y i riješiti je.
- (b) U kojem će trenutku 90% stanovništva znati vijest?
11. Kolač je izvađen iz pećnice na $200^\circ C$. Nakon 10 minuta temperatura kolača bila je $150^\circ C$. Za koliko će vremena kolač biti na temperaturi od $30^\circ C$ ako je sobna temperatura $20^\circ C$?
12. Kultura bakterija u početku ima 1000 bakterija. Stopa rasta je proporcionalna broju bakterija. Nakon $2h$ populacija je narasla na 9000 jedinki. Odrediti izraz koji određuje broj bakterija nakon t sati. Odrediti broj bakterija nakon $10h$.
13. Vrijeme poluraspada izotopa stroncija ${}^{90}Sr$ je 25 godina. Početna masa uzorka ${}^{90}Sr$ je 18 mg.
- (a) Izračunati masu koja ostaje nakon t godina.
- (b) Koliko vremena treba da se masa smanji na 2 mg?