3. OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

1. Uvod

Glavni problem integralnog računa:

Tražimo funkciju $y = y(x)$ za koju vrijedi

$$y' = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = f(x), \quad dy = f(x)\,dx$$

na nekom intervalu I. Funkcija $y = y(x)$ je određena "do na konstantu", što smo zapisivali u obliku

$$y(x) = \int f(x)\,dx + c, \quad x \in I.$$

Primjer

$$y' = \cos x \implies y(x) = \int \cos x dx + c = \sin x + c$$

Slično bi riješili i problem $y'' = 0$. Uzastopnim integriranjem dobivamo:

$$y'(x) = c_1, \qquad y(x) = c_1 x + c_2.$$

Analogno, uzastopnim integriranjem, rješavamo i problem

$$y^{(n)}(x) = f(x).$$

- *Diferencijalnom jednadžbom* nazivamo bilo koju jednadžbu koja analitičkim zapisom povezuje nepoznatu funkciju, nezavisnu varijablu (ili nezavisne varijable) i derivacije nepoznate funkcije.

- Diferencijalna jednadžba naziva se *obična diferencijalna jednadžba* ako je u njoj nepoznata funkcija, funkcija samo jedne varijable.

- *Red* obične diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koja se nalazi u jednadžbi.
- *Opći oblik* obične diferencijalne jednadžbe n-toga reda je

$$F(x,\ y,\ y',\ y'', ...,\ y^{(n)}) = 0$$

ili

$$y^{(n)} = f\left(x,\ y,\ y',\ y'', ...,\ y^{(n-1)}\right)$$

Primjer

a)

$$y' - 2y = x - 3$$

je obična diferencijalna jednadžba prvog reda ($x-$nezavisna varijabla, $y = y(x)-$nepoznata funkcija);

b)

$$y'' - 2ty' = t^2$$

je obična diferencijalna jednadžba drugog reda ($t-$nezavisna varijabla, $y = y(t)-$nepoznata funkcija),

c)

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

je parcijalna diferencijalna jednadžba ($x, y-$nezavisne varijable, $z = z(x, y)-$nepoznata funkcija).

- *Rješenje* diferencijalne jednadžbe n-toga reda je svaka funkcija koja joj (zajedno sa svojim derivacijama) uvrštenjem identički udovoljava.

- *Riješiti* diferencijalnu jednadžbu znači odrediti sve funkcije (eksplicitno ili implicitno) koje, zajedno sa svojim derivacijama identički zadovoljavaju danu diferencijalnu jednadžbu.

Primjer Dana je diferencijalna jednadžba

$$y'' + y = 0.$$

Provjerimo jesu li neke od funkcija:

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x, \quad y_3(x) = \sin x + \cos x$$

rješenja gornje diferencijalne jednadžbe. Imamo:

a)

$$y_1(x) = \cos x \Longrightarrow y_1'(x) = -\sin x \Longrightarrow y_1''(x) = -\cos x.$$

Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\underbrace{-\cos x}_{y_1''(x)} + \underbrace{\cos x}_{y_1(x)} = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0,$$

pa je $y_1(x) = \cos x$ rješenje.

Slično,

b)

$$y_1(x) = \sin x \Longrightarrow y_1'(x) = \cos x \Longrightarrow y_1''(x) = -\sin x.$$

Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\underbrace{-\sin x}_{y_2''(x)} + \underbrace{\sin x}_{y_2(x)} = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0,$$

pa je $y_2(x) = \sin x$ rješenje.

c)

$$y_3(x) = \sin x - \cos x \Longrightarrow y_1'(x) = \cos x + \sin x$$
$$\Longrightarrow y_1''(x) = -\sin x + \cos x.$$

Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\underbrace{-\sin x + \cos x}_{y_2''(x)} + \underbrace{\sin x - \cos x}_{y_2(x)} = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0,$$

a je $y_3(x) = \sin x - \cos x$ rješenje.

- <u>*Opće rješenje*</u> diferencijalne jednadžbe $n-$tog reda je obitelj funkcija

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$$

gdje su $C_1, C_2, ..., C_n$ realne konstante, koja diferencijalnu jednadžbu zadovoljava identički.

- *Posebno (ili partikularno) rješenje* se dobiva iz općeg rješenja (ili integrala) za konkretne vrijednosti konstanti $c_1,\ c_2, ...,\ c_n$. Da bi se odredilo neko posebno rješenje, obično se postave dodatni zahtjevi, tzv. *početni uvjet* kojemu ono mora udovoljavati. Ako je opće rješenje poznato onda se iz njega, temeljem početnog uvjeta, lako izdvaja traženo posebno rješenje

Primjer Opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y = 0$$

je

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Provjera:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \sin x + c_2 \cos x \Longrightarrow y'(x) = c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ &\Longrightarrow y''(x) = -c_1 \sin x - c_2 \cos x. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\underbrace{-c_1 \sin x - c_2 \cos x}_{y''(x)} + \underbrace{c_1 \sin x + c_2 \cos x}_{y(x)} = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0,$$

pa je funkcija oblika

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

rješenje za sve vrijednosti konstanti C_1 i C_2.

a) Za $C_1 = 0$ i $C_2 = 1$ dobivamo partikularno rješenje

$$y_1(x) = \cos x;$$

b) Za $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$ dobivamo partikularno rješenje

$$y_2(x) = \sin x;$$

c) Za $C_1 = 1$ i $C_2 = -1$ dobivamo partikularno rješenje

$$y_3(x) = \sin x - \cos x;$$

- Ponekad postoje rješenja diferencijalne jednadžbe koja se ne mogu dobiti iz općeg rješenja (za konkretne vrijednosti konstanti $C_1, C_2, ..., C_n$). Ta rješenja nazivamo *singularnim rješenjima*.
- Graf rješenja (paritikularnog ili općeg) se naziva *integralna krivulja* (ili obitelj *integralnih krivulja* - za opće rješenje)

Primjer Opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y^2 y'^2 + y^2 - 1 = 0$$

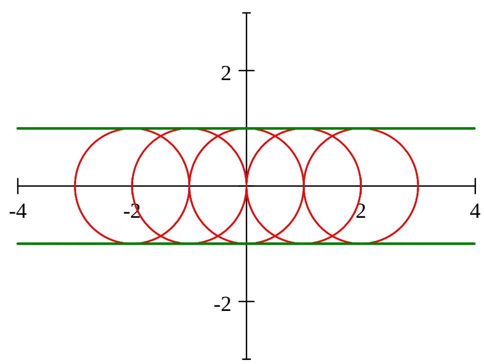
je

$$(x - C)^2 + y^2 = 1$$

(provjerti da je to rješenje). Međutim postoje rješenja

$$y(x) = 1 \text{ i } y(x) = -1$$

(provjerti da su to rješenja) koja se ne mogu dobiti iz općeg za neku konkretnu vrijednost konstante C. Dakle, $y(x) = 1$ i $y(x) = -1$ su singularna rješenja.



$$(x - C)^2 + y^2 = 1, y = 1, y = -1$$

Graf općeg rješenja (integralne krivulje) je obitelj kružnica $(x - C)^2 + y^2 = 1$ radijusa 1 kojima centar "šeta" po osi x, a grafovi singularnih rješenja su pravci $y = 1$ i $y = -1$.

Tri važna pitanja:

- postojanje rješenja;
- nalaženje svih ili samo nekih rješenja;
- jedinstvenost rješenja uz dane početne uvjete.

Mi ćemo se baviti samo nekim tipovima običnih diferencijalnih jednadžbi do uključivo drugog reda, tj. diferencijalnim jednadžbama oblika

$$F(x,\ y,\ y') = 0 \quad \text{(ili} \quad y' = f(x,\ y))$$

i

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (\text{ili} \quad y'' = f(x, y, y')).$$

2. Oblikovanje diferencijalne jednadžbe

Za opisivanje fizikalnih (realnih) problema često koristimo matematičke modele (idealizacija) koji su često dani u obliku diferencijalnih jednadžbi. Pomoću diferencijalnih jednadžbi se opisuju problemi kod kojih, na temelju trenutnog stanja i načina kako se nešto mijenja, želimo "predvidjeti budućnost".

Primjer (Problem rasta)

Model 1 U raznim situacijama se susrećemo s nekom veličinom čija je brzna promjene proporcionalna s njenom trenutnom vrijednošću. Npr. rast (pad) populacije proporcionalan je broju trenutne populacije, brzina raspada radioaktivne tvari proporcionalna je trenutnoj količini te tvari, dobit je proporcionalna količini uloženog novca,... .

Ovu zakonitost matematički formuliramo:

$$y' = \frac{dy}{dt} = ky.$$

(dif. jed. I. reda - *populacijska jednadžba*)

Napomena: Ovdje je:

- vrijeme t nezavisna varijabla,
- veličina populacije nepoznata funkcija $y(t)$,
- $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ mjeri promjenu (rast ili pad) populacije u vremenu.

Uočimo:

- ako je $k > 0$ onda je $\frac{dy}{dt} > 0$, što znači da populacija raste,
- ako je $k < 0$ onda je $\frac{dy}{dt} < 0$ što znači da populacija pada.

Rješenje je

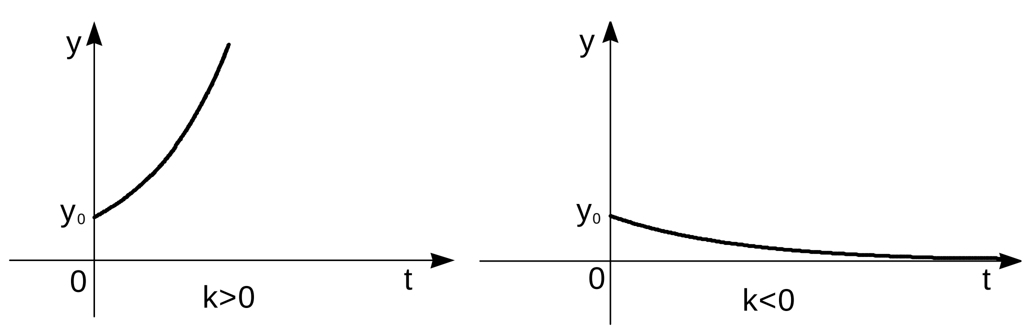
$$\frac{dy}{dt} = ky \implies \frac{dy}{y} = kdt$$

$$\implies \ln|y| = kt + C_1 \implies y = Ce^{kt} \qquad (C = \pm e^{C_1}).$$

Konstantu C određujemo prema početnom stanju y_0, tj. veličini populacije u trenutku $t_0 = 0$. Budući je $y(0) = Ce^0 = C$, rješenje je

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Graf ove funkcije je:



Pretpostavka da je rast (pad) populacije proporcionalan je broju trenutne populacije je dobra ako imamo idealne uvjete. Npr. ako se radi o populaciji bakterija ili životinja to znači da npr. životni prosor nije ograničen, nema prirodnih neprijatelja, ima dovoljno hrane,... .

Model 2 Pretpostavimo da je rast populacije proporcionalan je broju trenutne populacije, ali da veličina populacije počima opadati kad dosegne kapacitet K. Ove uvjete možemo opisati ovako:

- $\frac{dy}{dt} \approx ky,$ za y dovoljno malen;

- $\frac{dy}{dt} < 0,$ za $y > K.$

Matematički model je *logistička diferencijalna jednadžba*:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right), \ k > 0$$

Naime, ako je

- $y << K$ $(y$ dovoljno malen$)$ onda je $\frac{y}{K} \approx 0$, tj. $1 - \frac{y}{K} \approx 1$, pa je $\frac{dy}{dt} \approx ky;$

- $y > K$ onda je $\frac{y}{K} > 1$, tj. $1 - \frac{y}{K} < 0$, pa je $\frac{dy}{dt} < 0.$

Opće rješenje logističke diferencijalne jednadžbe (dif. jed. sa sep. var. - kasnije) je

$$y(t) = \frac{K}{1 + ce^{-kt}}.$$

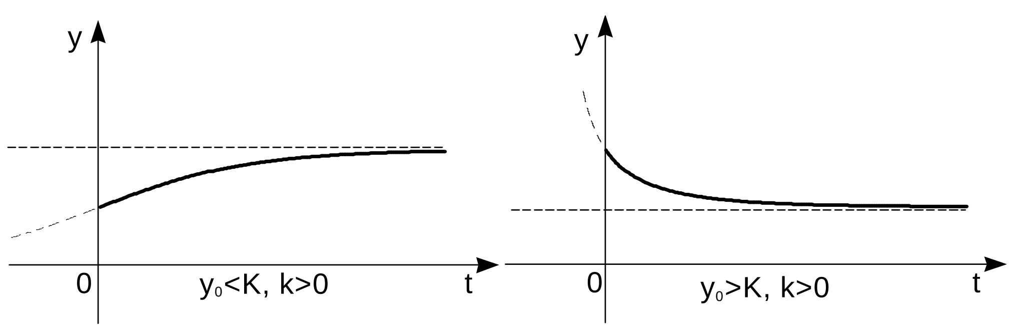
Konstantu c određujemo prema početnom stanju y_0, tj. količini u trenutku $t_0 = 0$. Budući je $y(0) = \frac{K}{1+c}$, imamo

$$\frac{K}{1+c} = y_0 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{K - y_0}{y_0},$$

tj.

$$y(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - y_0}{y_0} e^{-kt}}.$$

Graf ove funkcije je:



Model 3 Pretpostavimo da je rast populacije proporcionalan je broju trenutne populacije, ali da veličina populacije počima opadati kad dosegne kapacitet K, te počima izumirati kad je veličina populacije manja od m .

Ove uvjete možemo opisati ovako:

- $\frac{dy}{dt} \approx ky$ za y nije prevelik niti premalen $(m << y << K)$;
- $\frac{dy}{dt} < 0$ za $y > K$;
- $\frac{dy}{dt} < 0$ za $y < m$.

Matematički model:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{y}\right), \quad k > 0$$

Naime, ako je

- $m << y << K$ onda je $\frac{y}{K} \approx 0$ i $\frac{m}{y} \approx 0$, tj. $1 - \frac{y}{K} \approx 1$ i $1 - \frac{m}{y} \approx 1$, pa je $\frac{dy}{dt} \approx ky$;
- $y > K$ onda je $\frac{y}{K} > 1$ i $\frac{m}{y} < 1$, tj. $1 - \frac{y}{K} < 0$, $1 - \frac{m}{y} > 0$, pa je $\frac{dy}{dt} < 0$;
- $y < m$ onda je $\frac{m}{y} > 1$ i $\frac{y}{K} < 1$, tj. $1 - \frac{y}{K} > 0$, $1 - \frac{m}{y} < 0$, pa je $\frac{dy}{dt} < 0$;

Primjer Kultura bakterija u početku ima 1000 bakterija, a stopa rasta je proporcionalna broju bakterija. Nakon 2 sata populacija je 9000. Odredite izraz koji određuje broj bakterija nakon t sati. Kolika je populacija nakon 3 sata?

Matematički model je populacijska jednadžba

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

Opće rješenje ove diferencijalne jednadžbe je

$$y(t) = Ce^{kt}.$$

Budući je $y(0) = 1000$, imamo

$$y(t) = 1000e^{kt}.$$

Dakle, budući je $y(2) = 9000$, to je

$$9000 = 1000e^{k\cdot 2} \implies k \simeq 1.0986,$$

pa je

$$y(t) = 1000e^{1.0986\cdot t}.$$

Sada je

$$y(3) = 1000e^{1.0986\cdot 3} \simeq 26999$$

Primjer U jezero je pušteno 400 riba. Nakon prve godine se broj ribe utrostručio. Odrediti koliko će biti ribe u jezeru nakon t godina, ako je procjena da je kapacitet jezera 10000 riba. Za koliko vremena će broj ribe u jezeru narasti na 5000?

Matematički model je logistička diferencijalna jednadžba

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

gdje je $K = 10000$ kapacitet jezera. Opće rješenje ove diferencijalne jednadžbe je

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-kt}} = \frac{10000}{1 + Ce^{-kt}}.$$

Budući je $y(0) = 400$, imamo $400 = \frac{10000}{1+Ce^0}$ i $C = 24$. Dakle,

$$y(t) = \frac{10000}{1 + 24e^{-kt}}.$$

Kako znamo da se broj ribe utrostručio nakon prve godine, to je $y(1) = 1200$, pa je

$$1200 = \frac{10000}{1 + 24e^{-k\cdot 1}} \Rightarrow k = \ln\frac{36}{11} \Rightarrow k \simeq 1.186.$$

Dakle, broj ribe u jezeru nakon t godina je

$$y\left(t\right)=\frac{10000}{1+24e^{-1.\,186\cdot t}}.$$

Sada odredimo koliko vremena će broj ribe u jezeru narasti na 5000. Imamo

$$5000=\frac{10000}{1+24e^{-1.\,186\cdot t}}\ \Rightarrow t=\frac{\ln 24}{1.\,186}\simeq 2.\,68,$$

što je približno 2 godine i 8 mjeseci.

3. Neke obične diferencijalne jednadžbe prvog reda

3.1 Postojanje rješenja

Ovdje ćemo upoznati kriterije za rješivost diferencijalnih jednadžbi što dopuštaju zapis

$$y' = G(x, y),$$

pri čemu je $G : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, dana funkcija koja udovoljava nekim dodatnim uvjetima, a traženo rješenje je nepoznata funkcija $y = f(x)$ (jedne varijable).
Problem nalaženja rješenja diferencijalne jednadžbe

$$y' = G(x, y)$$

koje zadovoljava dani početni uvjet

$$y = y_0 \text{ za } x = x_0, \quad \text{tj. } y\left(x_0\right) = y_0.$$

naziva se Cauchyjev problem ili problem s početnim uvjetima.

Teorem (Picardov) Neka su dane funkcija $G : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, i točka $(x_0, y_0) \in X$ i neka postoji pravokutnik

$$P = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq X, \quad a, b \in \mathbb{R}^+,$$

takav da vrijedi:

- G je neprekidna na P;
- G udovoljava tzv. Lipschitzovu uvjetu na P po varijabli y, tj.

$$\left(\exists L \in \mathbb{R}^+\right) (\forall (x_1, y_1), (x_1, y_2) \in P)$$
$$|G(x_1, y_1) - G(x_1, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,.$$

Tada diferencijalna jednadžba, s početnim uvjetom,

$$y' = G(x, y),\ x = x_0, y = y_0,$$

ima točno jedno rješenje koje je neprekidna funkcija

$$f : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R},\ y_0 = f(x_0),$$

gdje je $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, a

$$M = \max\{|G(x, y)| \mid (x, y) \in P\}.$$

(Broj L nazivamo Lipschitzovom konstantom.)

3.2 Diferencijalne jednadžbe s odjeljivim (separiranim) varijablama

Pretpostavimo da se obična diferencijalana jednadžba prvog reda $F(x,y,y')=0$ može zapisati kao

$$y' = g(x), \quad \text{tj.} \quad dy = g(x)dx,$$

pri čemu je g neprekidna funkcija. Tada je svaka primitivna funkcija G za funkciju g neko rješenje promatrane jednadžbe. Naime,

$$(\int g(x)dx)' = G'(x) = g(x).$$

Ali vrijedi i obratno, svako rješenje f promatrane diferencijalne jednadžbe je neka primitivna funkcija za funkciju g, jer mora biti $f' = g$. Zaključujemo da je opće rješenje polazne diferencijalne jednadžbe pripadni neodređeni integral i pišemo

$$y = \int g(x)dx.$$

Ako je pritom f_0, tj. $y = f_0(x)$, bilo koje posebno rješenje, onda se svako drugo rješenje f razlikuje od njega za neku aditivnu konstantu C, tj.

$$f(x) = f_0(x) + C.$$

Primjer Rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Longleftrightarrow \quad dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

je

$$y = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C.$$

tj. svaka funkcija iz skupa

$$\{f_C : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f_C(x) = \arcsin x + C,\ C \in \mathbb{R}\}$$

Ako je npr. početni uvjet $x = 0$, $y = 0$, dobivamo posebno rješenje

$$f_0(x) = \arcsin x.$$

Promatrajmo sada malo općenitiji slučaj, tj. diferencijalnu jednadžbu $F(x, y, y') = 0$ koja dopušta zapis

$$y' = g(x) \cdot h(y).$$

Njoj se, dakle, varijable mogu odijeliti (separirati) tako da se dobije jednadžba

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx, \quad h(y) \neq 0,\ y \in D_h.$$

Integrirajući obje strane dobivamo

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C,$$

što smatramo općim rješenjem, tj. njezino rješenje je skup svih funkcija implicitno zadanih tom integralnom jednadžbom.

Pritom kažemo da smo polaznu diferencijalnu jednadžbu riješili **odijeljujući** (**separirajući**) **varijable.**

Primjer Diferencijalnoj jednadžbi

$$y - xy' = 2(1 + x^2y'),$$

je ekvivalentna diferencijalna jednadžba

$$dy(2x^2 + x) = (y - 2)dx,$$

a ova se ("u glavnom") svodi na

$$\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x(2x+1)}$$

(kad je $y \neq 2$, $x \neq 0$ i $x \neq -\frac{1}{2}$).

Riješimo ovu zadnju pod svim naznačenim ograničenjima! Integrirajući obje strane dobivamo

$$\ln|y-2| = \ln|x| - \ln|2x+1| + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Budući da je $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bijekcija, to za svaki K postoji neki $C \neq 0$ takav da je $\ln|C| = K$, pa imamo

$$\ln|y-2| = \ln\frac{|Cx|}{|2x+1|}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Slijedi da opće rješenje dopušta zapis

$$y = f_C(x) = \frac{Cx}{2x+1} + 2, \;\; x \in \mathbb{R}\setminus\{-\tfrac{1}{2}, 0\}, \;\; C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Napomena: sva ta rješenja dopuštaju f_C proširenje na točku $x = 0$ (pripadnom vrijednošću $y = f_C(0) = 2$).

Raspravimo sada slučajeve što smo ih bili isključili:

- $y = 2$ povlači $y' = 0$, pa uvrštenjem u polaznu jednadžbu dobivamo

$$2 - x \cdot 0 = 2(1 + x^2 \cdot 0) \implies 2 = 2$$

  Slijedi da je i konstantna funkcija $y = 2$, rješenje.

- Napokon, u točki $x = -\frac{1}{2}$ polaznoj jednadžbi udovoljava $y = 2$, što se uklapa u prethodni slučaj.

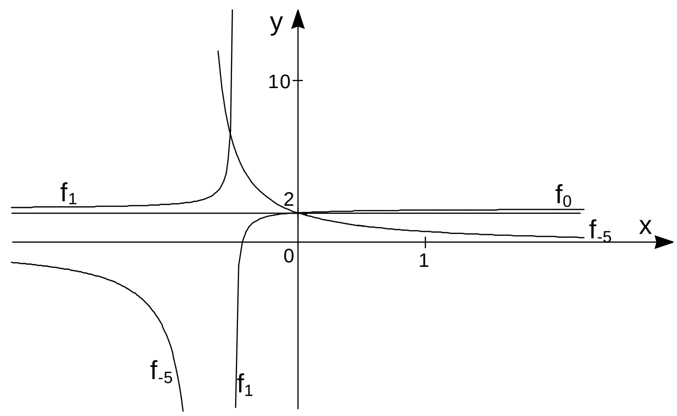
Prema tomu, sva rješenja su dana sa

$$y = f_C(x) = \frac{Cx}{2x+1} + 2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{2}\},\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$y = f_0(x) = 2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Napomenimo da je $y = f_0(x) = 2$ singularno rješenje, jer ga ne možemo dobiti odabirom konstante C.

Na slici je prikazano nekoliko rješenja (f_0,f_1, f_{-5}).



Da bi se odredilo posebno rješenje, što udovoljava početnomu uvjetu $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, treba izračunati konstantu C iz jednadžbe

$$3 = \frac{1 \cdot C}{2 \cdot 1 + 1} + 2$$

Dobivamo $C = 3$, pa je posebno rješenje

$$f_3(x) = \frac{3x}{2x + 1} + 2.$$

Uočimo, ako je $x_0 = 0$ mora biti $y_0 = 2$, jer sva rješenja f_C prolaze točkom $(0, 2)$, pa tada među njima tim početnim uvjetom nije određeno posebno rješenje.