2. Računanje određenog integrala

Teorem 2.1 (Newton-Leibnizova formula) Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada vrijedi *Newton-Leibnizova formula*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{N-L}$$

gdje je F bilo koja primitivna funkcija od f.

Dokaz:

Uobičajena oznaka je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Napomena: Newton-Leibnizova formula se može primijeniti i ako je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ izuzev u konačno mnogo točaka u kojima ima uklonjivi prekid ili prekid prve vrste (f je po djelovima neprekidna funkcija na $[a, b]$).

Primjer 1 Izračunati $\int_1^2 xdx$.

$$\int_1^2 xdx \overset{(N-L),(4)}{=} \left(\tfrac{1}{2}x^2+1\right)\Big|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\cdot 2^2+1\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 1^2+1\right) = \frac{3}{2}$$

<u>Uočimo:</u> $f(x) = x$ je neprekidna na $[1,2]$.

Primjer 2 Izračunati $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

Izračunajmo neodređeni integral

$$\int x\cos x dx = \begin{bmatrix} u=x \\ dv=\cos x dx \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C,$$

i imamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx \overset{(N-L)}{=} (x\sin x + \cos x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{2}\pi - 1.$$

<u>Uočimo:</u> $f(x) = x\cos x$ je neprekidna na $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Osnovni teorem računa

Osnovni teorem računa dobio je naziv po tome što povezuje diferencijalni s integralnim računom. Osnovni teorem otkrili su nezavisno Newton i Leibniz i on daje precizan odnos između derivacije i integrala.

Teorem 3.1 (Osnovni teorem računa)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, deinirana sa

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \qquad x \in [a, b].$$

Tada je g primitivna funkcija od f.

Dokaz: (u specijalnom slučaju).

Tvrdnju teorema možemo zapisati na sljedeći način:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x), \qquad x \in [a, b].$$

Napomena 3.2 Sa $g(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ često se definiraju funkcije neophodne u fizici, kemiji, statistici,.... Ovog oblika su npr. funkcije

$$S(x) = \int\limits_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}dt \qquad \text{Frenselova funkcija (optika)}$$

$$\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt \qquad \text{Sinus integralni (elektronika)}$$

Napomena 3.3 Newton-Leibnitzova formula

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

napišemo li je drugačije, također povezuje integral i derivaciju

$$\int\limits_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (F' = f).$$

ovo znači da ako uzmemo prvo derivaciju, a potom integraciju, opet se vraćamo na polaznu funkciju F, sada u obliku $F(b) - F(a)$.

Zbog ove veze, u literaturi Osnovni teorem integralnoga računa je često dan u sljedećem obliku:

Osnovni teorem računa:

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada vrijedi:

i) Ako je $g(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ tada je $g'(x) = f(x)$,

ii) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, gdje je F primitivna funkcija od f, tj. $F' = f$.

Primjer 1 Izračunati derivaciju funkcije

$$g(x) = \int_{-1}^{x} (t^2 - 1)^{20} dt.$$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-1}^{x} (t^2 - 1)^{20} dt \right) \overset{T3.1}{=} (x^2 - 1)^{20}$$

Primjer 2 Izračunati derivaciju funkcije

$$g(x) = \int_{2}^{\frac{1}{x}} \sin^4 t dt.$$

$$g(x) = \int_2^{\frac{1}{x}} \sin^4 t dt = \left[u\left(x\right) = \frac{1}{x} \right] = \int_2^{u} \sin^4 t dt$$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{du} g(u\left(x\right)) \cdot \frac{du}{dx} =$$

$$= \frac{d}{du} \left(\int_{-1}^{u} \sin^4 t dt \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \overset{T3.1}{=}$$

$$= \sin^4 u \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2} \sin^4 \frac{1}{x}$$

4. Supstitucija i parcijalna integracija u određenom integralu

Do sada smo kod izračunavanja određenog integrala primjenjivali Newton-Leibnizovu formulu: izračunali smo neodređeni integral i potom izračunali vrijednosti primitivne funkcije u rubnim točkama integracijskog segmenta.

Druga mogućnost, koja se prakticira, jest da se primjeni supstitucija ili parcijalna integracija u određenom integralu.

Teorem 4.1 Neka za (neprekidnu) funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ postoji neka primitivna funkcija na intervalu $I = [a,b]$. Nadalje, neka je $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ (ili $\varphi : [\beta,\alpha] \to [a,b]$) strogo monotona i neprekidno derivabilna surjekcija, tako da je $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$, tada je

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b f(x)dx. \qquad \text{(sup)}$$

Dokaz:

Primjer Izračunati površinu P kruga radijusa R. Račun daje

$$\tfrac{1}{4}P = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x = \underbrace{R\cos t}_{\varphi(t)} \\ 0 \to \frac{\pi}{2}, R \to 0 \end{array} \right] =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{R^2 - R^2\cos^2 t}(-R\sin t)dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 t}\sin t dt$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t)dt =$$

$$R^2 \left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{4}R^2\pi,$$

poznatu formulu za površinu kruga $P = R^2\pi$.

Teorem 4.2 Neka se (neprekidna) funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dade napisati u obliku $f(x) = g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$, gdje je g neka neprekidna funkcija i ψ neka neprekidno derivabilana funkcija. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(\psi(x))\psi'(x)dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)dt. \tag{sup}$$

<u>Dokaz:</u>

Primjer Izračunati integral $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^5 x \cdot \cos x dx$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^5 x \cos x dx = \begin{bmatrix} \psi(x) = \sin x = t \\ 0 \rightarrow 0, \ \frac{3\pi}{2} \rightarrow -1 \end{bmatrix} =$$

$$\int_0^{-1} t^5 \cdot dt = \left(\frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^{-1} = \frac{1}{6}$$

Parcijalna integracija se prenosi direktno:

Teorem 4.3 Ako su funkcije $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno derivabilne, onda vrijedi

$$\int_a^b g(x)h'(x)dx = [g(x)h(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b h(x)g'(x)dx.$$

Primjer Izračunati $\int_0^1 arctg\, x\, dx$.

$$\int_0^1 arctg\, x\, dx = \left[\begin{array}{c} u=arctg\, x\, x \\ dv=dx \end{array} \right] =$$

$$= (x arctg\, x\,)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

Napomena: Ukoliko funkcija ima neku simetriju (parna, neparna funkcija), te ako su granice integracije simetrične obzirom na ishodište, tada vrijedi:

- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ ukoliko je f parna funkcija;
- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ ukoliko je f neparna funkcija.

Primjer Vrijedi

$$\int_{-1}^{1} \frac{tg\, x}{1+x^2+x^4} dx = 0$$

jer je podintegralna funkcija neparna (i neprekidna na $[-1,1]$).

5. Nepravi integral

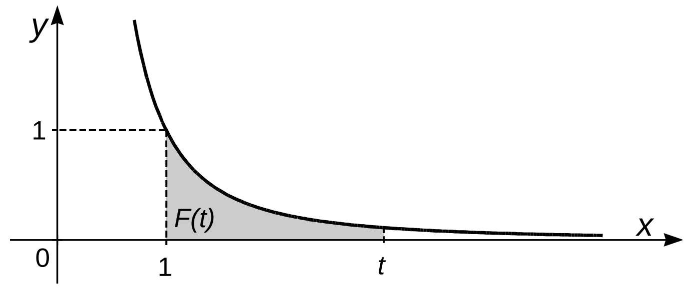
U definiciji određenog integrala $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ pretpostavili smo:

- segment $[a,b]$ je konačan;
- $f(x)$ je na tom segmentu ili neprekidna ili ima konačno uklonjivih prekida ili prekida prve vrste).

  – Ako prvi uvjet ”popravimo” i pretpostavimo da je interval "beskonačan" (neomeđen), dobivamo nepravi integral (II. tipa).

  – Ako drugi uvjet ”popravimo” i pretpostavimo da je $f(x)$ na segmentu $[a,b]$ neograničena (ima konačno prekida druge vrste) dobivamo nepravi integral (I. tipa).

Primjer Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2}$ desno od $x = 1$ (Slika 1).



Slika 1

Za $t > 1$ definiramo funkciju

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{t}.$$

Primjetimo da je $F(t) < 1$ za $t > 1$. Nadalje vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1,$$

pa možemo staviti da je površina (neomeđenog) lika ispod krivulje $y = \frac{1}{x^2}$ (desno od 1) jedanaka 1.

Ovdje leži motiv da nepravi integral funkcije na neomeđenom definicijskom području definiramo da način:

Definicija 5.1

a) Ako postoji $\int\limits_a^t f(x)\,dx$ za $\forall t \geq a$, tada je

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{t\to\infty} \int\limits_a^{t} f(x)\,dx.$$

b) Ako postoji $\int\limits_t^b f(x)\,dx$ za $\forall t \leq b$, tada je

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{a\to-\infty} \int\limits_t^{b} f(x)\,dx.$$

Ako limes u a) (u b)), postoji (konačan je), onda kažemo da nepravi integral I. tipa $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, ($\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$), konvergira. U suprotnom kažemo da divergira.

c) Definiramo još nepravi integral I. tipa oblika

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx.$$

gdje je a bilo koji realan broj. Ako oba integrala

$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ i $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiraju, kažemo da $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ <u>konvergira</u>. U suprotnom (tj. ako barem jedan divergira) kažemo da $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ <u>divergira</u>.

Primjer Izračunati $I = \int_{-\infty}^{0} xe^x dx$.

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[(xe^x)\Big|_{x=t}^{x=0} - \int_{t}^{0} e^x dx \right] =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} [\underbrace{-te^t}_{\to 0} - 1 + \underbrace{e^t}_{\to 0}] = -1.$$

Primjer U ovisnosti od $p > 0$ ispitati konvergenciju integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$.

Pokazali smo da je za $p = 2$ integral konvergentan.

Općeniti za $p \neq 1$ imamo

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right) \Bigg|_1^t =$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{-p+1} \left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{konvergentan za } p > 1 \\ \infty, & \text{divergentan za } 0 < p < 1 \end{cases}$$

(vrijedi $\lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1 \\ \infty, & 0 < p < 1 \end{cases}$).

Ostaje još razmotriti slučaj kada je $p = 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \infty,$$

pa u ovom slučaju integral divergira.

Teorem 5.2 (Poredbeni kriterij)

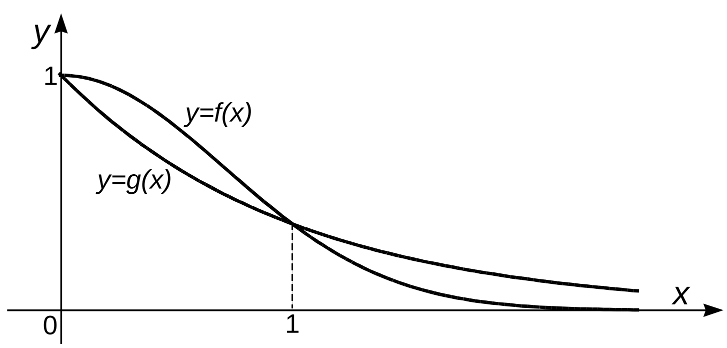
Neka je $0 \leq f(x) \leq g(x)$, za $\forall x \geq a$.

- Ako $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ konvergira, onda i $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ konvergira.

- Ako $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ divergira, onda i $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ divergira.

Primjer Dokazati da je $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ konvergentan.

Ovdje je problem u tome što $\int_1^t e^{-x^2}dx$ nije elementaran integral. Promotrimo funkcije $f(x) = e^{-x^2}$ i $g(x) = e^{-x}$ (Slika 1).



Slika 1.

Budući je $0 \leq f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \geq 1$, ustanovimo li da je integral $\int_1^\infty e^{-x}dx$ konvergentan, jasno je da će tada i $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ biti konvergentan. Imamo:

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx \; = \; \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} e^{-x} dx =$$

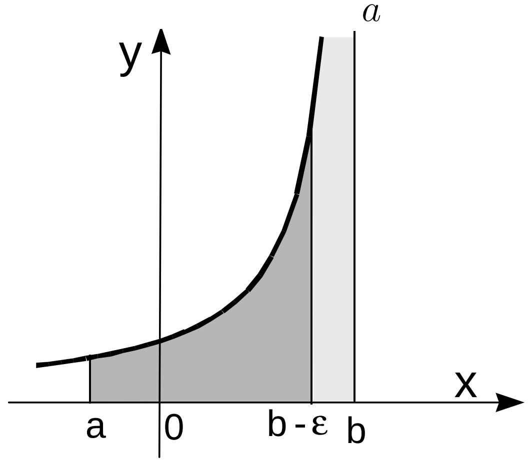
$$\lim_{t \to \infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_{x=1}^{x=t} \; = \; \lim_{t \to \infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1}$$

i polazni integral jest konvergentan.

Definicija 5.3

a) Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a, b)$ i $\lim\limits_{x \to b^{-0}} f(x) = \pm\infty$ (Slika 2), tada je

$$\int_a^b f(x)\, dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx. \qquad (1.a.)$$



b) Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na $(a, b]$ i $\lim\limits_{x \to a^{+0}} f(x) = \pm\infty$ tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{2.b.}$$

Ako limes (1.a) ((2.b.)), postoji (konačan je), onda kažemo da nepravi integral II. tipa $\int_a^b f(x)\,dx$, ($\int_a^b f(x)\,dx$), konvergira. U suprotnom kažemo da divergira.

c) Ako je $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ funkcija, osim u točki $c \in (a, b)$ gdje je $\lim\limits_{x \to c^{-0}} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim\limits_{x \to c^{+0}} f(x) = \pm\infty$, definiramo nepravi integral II. tipa

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x)dx. \tag{3.c.}$$

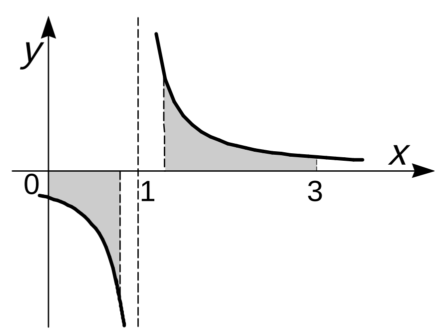
Ako oba limesa u (3.c.) postoje, kažemo da

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konvergira. U suprotnom (tj. ako barem jedan ne postoji) kažemo da $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ divergira.

Primjer Izračunati $I = \int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$.
Malo nepažnje daje

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = (\ln|x-1|)\Big|_{x=1}^{x=3} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

no to je netočan rezultat. Naime, funkcija $f(x)$ ima u $x = 1$ vertikalnu asimptotu.



Dakle, treba primijeniti (3.a.), tj. izračunati nepravi integral

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{x-1} dx + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{1+\delta}^3 \frac{1}{x-1} dx.$$

Vrijedi

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{x-1}dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} [\ln|1-\varepsilon-1| - \ln|-1|] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\underbrace{\ln\varepsilon}_{\to -\infty} - 0] = -\infty$$

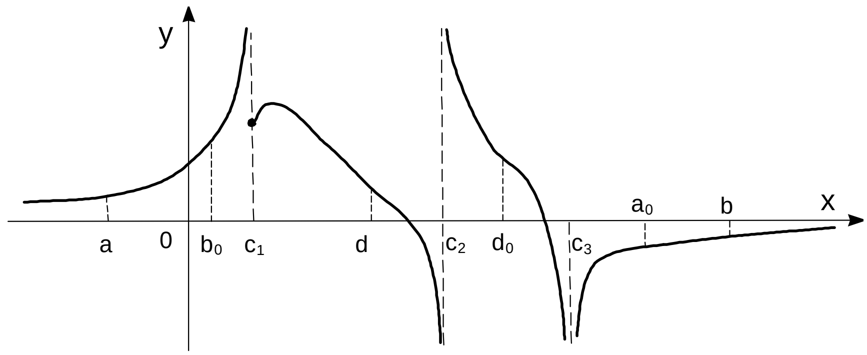
i polazni nepravi integral jest divergentan.

Napokon, sada je očito kako postupiti u "općem" slučaju, tj. kad postoji (najviše) konačno mnogo točaka c_i u kojima je

$$\lim_{x\to c_i \pm 0} f(x) = \pm\infty, i = 1, \cdots, n$$

ili (i) je integracijski interval neograničen.

Primjer Neka je dana funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ kojoj je graf G_f prikazan na slici:



Ovdje je važno uočiti da je $\lim\limits_{x \to c_1^{-0}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to c_2^{-0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to c_2^{+0}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to c_3^{\pm 0}} f(x) = -\infty$. U skladu s prethodnim razmatranjem, odaberimo točke a, a_0, b, b_0, i d_0 tako da bude $a \leq b_0 < c_1$, $c_1 < d < c_2$, $c_2 < d_0 < c_3 < a_0 < b$, pa nepravi integral funkcije f ima ovaj zapis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^{b_0} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{b_0}^{c_1 - \varepsilon} f(x)dx +$$

$$\int_{c_1}^{d} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{d}^{c_2 - \delta} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0^+} \int_{c_2 + \eta}^{d_0} f(x)dx +$$

$$\lim_{\mu \to 0^+} \int_{d_0}^{c_3 - \mu} f(x)dx + \lim_{\rho \to 0^+} \int_{c_3 + \rho}^{a_0} f(x)dx + \lim_{s \to +\infty} \int_{a_0}^{s} f(x)dx.$$