

## 4.3 Teorija o poljima

- U ovom ćemo odjeljku ćemo dati nekoliko primjena skalarne i vektorske analize u prostoru  $\mathbb{R}^3$ ;
- Slučaj je naročito važan jer se u njemu opisuje naš fizički (tvarni) svijet.
- Oznake ćemo prilagoditi onima tradicionalnim što dolaze iz fizike.

### Skalarno i vektorsko polje

Oznake:

- Za svaku točku  $T$  u prostoru  $\mathbb{E}$  neka  $\vec{\mathbb{V}}(T)$  označuje skup svih radijus-vektora  $\vec{r}_P$  (usmjerenih dužina  $\overrightarrow{TP}$ ) svih točaka  $P$  u prostoru  $\mathbb{E}$  s obzirom na točku  $T$ ;
- $\vec{\mathbb{V}} \equiv \cup \{ \vec{\mathbb{V}}(T) \mid T \text{ točka u } \mathbb{E} \}$ .

**Definicija 4.10** Neka je  $\Omega$  skup točaka u  $\mathbb{E}$ . Svaku funkciju  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo **skalarnim poljem**, a svaku funkciju  $\vec{V} : \Omega \rightarrow \vec{V}$  - **vektorskim poljem** na danom skupu  $\Omega$ .

- Drugim riječima, na točkovnom skupu  $\Omega$  je zadano skalarno (vektorsko) polje čim je svakoj točki  $T \in \Omega$  pridijeljen točno jedan broj  $U(T) \in \mathbb{R}$  (radijus-vektor  $\vec{r}_P \in \vec{V}(T)$ ).
- Primijetimo da definicija skalarnog i vektorskog polja ne ovisi o koordinatizaciji prostora  $\mathbb{E}$ . Međutim, u svakom koordinatnom sustavu  $\mathcal{S}$  u  $\mathbb{E}$ , svako skalarno polje  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  posve određeno nekom funkcijom

$$f : D \equiv \Omega_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega_{\mathcal{S}} \subseteq \mathbb{E}_{\mathcal{S}}, \quad f(T_{\mathcal{S}}) = U(T)$$

(indeks podsjeća na uvedeni koordinatni sustav).

- Slično vrijedi za svako vektorsko polje.

Ako u  $\mathbb{E}$  uvedemo Kartezijev desni pravokutni koordinatni sustav

$$\mathcal{S} = \left( O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right),$$

prostor  $\mathbb{E}$  se identificira s  $\mathbb{R}^3$  pa se svako skalarno polje  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  opisuje nekom (skalarnom) funkcijom

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = U(T),$$

a svako vektorsko polje  $\vec{V} : \Omega \rightarrow \vec{\mathbb{V}}$  nekom (vektorskom) funkcijom

$$\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{w}(x, y, z) = \vec{V}(T),$$

pri čemu su  $x, y$  i  $z$  koordinate točke  $T \in \Omega$  u sustavu  $\left( O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right)$ , tj.  $T \equiv (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$ . Pritom je, dakle,

$$\vec{V}(T) = w_x(x, y, z) \vec{i} + w_y(x, y, z) \vec{j} + w_z(x, y, z) \vec{k},$$

gdje su  $w_x, w_y, w_z : D \rightarrow \mathbb{R}$  koordinatne funkcije od  $\vec{w}$ , tj.  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ .

- Ponekad nećemo, jednostavnosti radi, praviti strogu jezičnu razliku između "polja" i "funkcije".
- Osim toga, najčešće nećemo međusobno formalno razlikovati ni skupove  $\vec{\nabla}(T)$ ,  $T \in \Omega$ , nego ćemo svakoga od njih poistovjetiti s  $\vec{\nabla}(O)$ , gdje će  $O$  biti ishodište Kartezijeva desnog pravokutnog sustava  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### Primjer 10

**(1)** Neka je  $\Omega$  Zemljina kruta površina zamišljena kao točkovni skup, te neka je, za svaki  $T \in \Omega$ ,  $U(T)$  nadmorska visina, odnosno, podmorska dubina te točke (s obzirom na dogovorenu nultu (nadmorsku) razinu). Tada je  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  skalarno polje - "reljefni globus";

**(2)** Neka je  $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2+y^2}$ . Tada je funkcijom

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z),$$

na pripadnom području posve zadano skalarno polje

$$T \mapsto U(T) = \frac{z}{x^2 + y^2},$$

pri čemu su  $x, y, i$  i  $z$  Kartezijeve koordinate točke  $T$  u odabranom sustavu  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

## Primjer 11

(1) Neka  $\Omega$  predstavlja Zemljin zračni omotač kao točkovni skup, te neka je, za svaki  $T \in \Omega$ ,  $\vec{V}(T)$  brzina zračnoga strujanja u toj točki (vjetrovni vektor) u odabranom trenutku. Tada je  $\vec{V} : \Omega \rightarrow \vec{V}$  vektorsko polje brzine vjetrova u atmosferi u odabranom trenutku;

(2) Neka je vektorska funkcija  $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadana koordinatnim funkcijama

$$w_x(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad w_y(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$w_z(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Tada je na  $\Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  zadano vektorsko polje

$$\begin{aligned}
T &\mapsto \vec{V}(T) = w(x, y, z) = \\
&w_x(x, y, z) \vec{i} + w_y(x, y, z) \vec{j} + w_z(x, y, z) \vec{k} = \\
&= \frac{x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},
\end{aligned}$$

pri čemu su  $x$ ,  $y$  i  $z$  Kartezijeve koordinate točke  $T$  u odabranomu sustavu  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Primijetimo da se radi o polju svih jediničnih radijus-vektora,

$$T \mapsto \vec{r}_0(T) = \frac{\overrightarrow{OT}}{\|\overrightarrow{OT}\|}, \quad T \neq O = (0, 0, 0),$$

s obzirom na dano ishodište  $O$ .)

**Napomena** Skalarno i vektorsko polje se mogu definirati općenitije u smislu da se uvede i ovisnost o vremenu. Takva polja nazivamo **nestacionarnima**, za razliku od prije definiranih koja onda nazivamo **stacionarnima**.

## Primjer 12

- Mjerimo li tako u temperaturu tijekom nekog vremenskog intervala, dobivamo primjer nestacionarnoga skalarnog polja, dok su u Primjeru 10 primjeri stacionarnog skalarnog polja.
- Nadalje, mjerimo li u Primjeru 11 (1) brzinu zračnoga strujanja tijekom nekog vremenskog intervala, dobivamo primjer nestacionarnoga vektorskog polja, dok je Primjer 11 (2) primjer stacionarnog vektorskog polja.

**Definicija 4.11** Reći ćemo da je skalarno polje  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  **neprekidno (diferencijabilno)** ako je njegov predstavnik  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , u provokutnom koordinatnom sustavu  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , neprekidna (diferencijabilna) funkcija.

Slično, reći ćemo da je vektorsko polje  $\vec{V} : \Omega \rightarrow \vec{V}$  **neprekidno (diferencijabilno)** ako je pripadna vektorska funkcija  $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  neprekidna (diferencijabilna).

**Napomena** Primijetimo da prethodna definicija nije apriori korektna. Trebalo bi, naime, uz nju dokazati da su neprekidnost i derivabilnost invarijante s obzirom na izbor pravokutnog koordinatnog sustava u prostoru  $\mathbb{E}$ , odnosno, da ne ovise o izboru predstavljajuće funkcije.

## **Gradijent, divergencija i rotacija**

- Ovdje ćemo definirati tri linearna operatora, neophodna za matematičko opisivanje temeljnih fizičkih zakona tvarnoga svijeta u kojemu živimo. Radi se u stvari o jednom operatoru djelovanje kojega se očituje na tri načina - ovisno o objektima na koje djeluje.
- Jednostavnosti radi, skalarna i vektorska polja ćemo odmah zadavati njihovim predstavnicima, tj. skalarnim i vektorskim funkcijama u Kartezijevu desnom pravokutnom koordinatnom sustavu  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  u  $\mathbb{E} \equiv \mathbb{R}^3$ .



**Definicija 4.12** Neka su  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , redom skalarno i vektorsko polje, te neka su oba diferencijabilna.

- **Gradijentom** skalarnoga polja  $f$  nazivamo vektorsko polje  $\text{grad } f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

tj.

$$\text{grad } f(x, y, z) =$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \vec{k}, \quad (x, y, z) \in D.$$

- **Divergencijom** vektorskoga polja  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$  nazivamo skalarno polje  $\text{div } \vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{div } \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z},$$

tj.

$$\text{div } \vec{w}(x, y, z) =$$

$$\frac{\partial w_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial w_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial w_z(x, y, z)}{\partial z}, \quad (x, y, z) \in D.$$

- **Rotacijom** vektorskoga polja  $\vec{w}$  nazivamo vektorsko polje  $\text{rot } \vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\text{rot } \vec{w} = \left( \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}, \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}, \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right),$$

tj.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{w}(x, y, z) = & \left( \frac{\partial w_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial w_y(x, y, z)}{\partial z} \right) \vec{i} + \\ & + \left( \frac{\partial w_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial w_z(x, y, z)}{\partial x} \right) \vec{j} + \\ & + \left( \frac{\partial w_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial w_x(x, y, z)}{\partial y} \right) \vec{k}, \quad (x, y, z) \in D. \end{aligned}$$

Primijetimo da  $\text{rot } \vec{w}$  dopušta formalni zapis u obliku determinante:

$$\text{rot } \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial & \partial & \partial \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

## Uočimo:

- gradijent je funkcija definirana na skupu svih diferencijabilnih skalarnih polja s vrijednostima u skupu diferencijabilnih vektorskih polja;
- divergencija je funkcija definirana na skupu svih diferencijabilnih vektorskih polja s vrijednostima u skupu skalarnih polja;
- rotacija je funkcija definirana na skupu svih diferencijabilnih vektorskih polja s vrijednostima u istomu skupu.

## Primjer 13

(1) Odredimo gradijent skalarnoga polja  $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = xy^2z^3$ .

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y, z) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) (x, y, z) = \\ &= \left( \frac{\partial f(xy^2z^3)}{\partial x}, \frac{\partial f(xy^2z^3)}{\partial y}, \frac{\partial f(xy^2z^3)}{\partial z} \right) = \\ &= (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) \end{aligned}$$

**(2)** Odredimo divergenciju vektorskoga polja

$$(x, y, z) \mapsto \vec{w}(x, y, z) = (2x, xy^2, xz^2).$$

$$\operatorname{div} \vec{w}(x, y, z) = \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) (x, y, z) =$$

$$\left( \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(xy^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xz^2)}{\partial z} \right) = 2 + 2xy + 2xz$$

**(3)** Odredimo rotaciju vektorskoga polja  $\vec{w}$  iz (2).

$$\operatorname{rot} \vec{w}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} (x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & xy^2 & xz^2 \end{vmatrix} =$$

$$\left( \frac{\partial(xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial(2x)}{\partial z} - \frac{\partial(xz^2)}{\partial x} \right) \vec{j} +$$

$$+ \left( \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2x)}{\partial y} \right) \vec{k} =$$

$$0 \vec{i} + (-z^2) \vec{j} + (y^2) \vec{k} = (0, -z^2, y^2)$$

Gradijent, divergencija i rotacija mogu opisati samo jednim operatorom.

Znakom  $\nabla$  (čitamo: nabra) označimo tzv. **Hamiltonov diferencijalni operator** - formalni vektor

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Gledamo li na  $\nabla$  kao na operator definiran na vektorskom prostoru svih diferencijabilnih skalarnih (vektorskih) polja, pojavljuju se, sljedeće mogućnosti:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \text{grad } f, && \left( \text{djelovanje operatora } \nabla \text{ na skalarno polje } f \right) \\ \nabla \cdot \vec{w} &= \text{div } \vec{w}, && \left( \text{formalni skalarni umnožak } \nabla \text{ i vektorskog polja } \vec{w} \right) \\ \nabla \times \vec{w} &= \text{rot } \vec{w}, && \left( \text{formalni vektorski umnožak } \nabla \text{ i vektorskog polja } \vec{w} \right); \end{aligned}$$

Važna je činjenica da je operator  $\nabla$  linearan u svakoj od navedenih interpretacija, tj. da vrijedi ovaj teorem:

**Teorem 4.13** Nabla je linearni operator, tj. za bilo koja dva diferencijabilna skalarna polja  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , bilo koja dva diferencijabilna vektorska polja  $\vec{w}, \vec{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , i bilo koja dva broja  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  vrijedi:

1.  $\nabla (\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$ ;
2.  $\nabla \cdot (\lambda \vec{w} + \mu \vec{u}) = \lambda (\nabla \cdot \vec{w}) + \mu (\nabla \cdot \vec{u})$ ;
3.  $\nabla \times (\lambda \vec{w} + \mu \vec{u}) = \lambda (\nabla \times \vec{w}) + \mu (\nabla \times \vec{u})$ .

**Dokaz:** Dokažimo npr. tvrdnju (3):

$$\begin{aligned} \nabla \times (\lambda \vec{w} + \mu \vec{u}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial & \partial & \partial \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda w_x + \mu u_x & \lambda w_y + \mu u_y & \lambda w_z + \mu u_z \end{vmatrix} = \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial & \partial & \partial \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial & \partial & \partial \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \\ &= \lambda (\nabla \times \vec{w}) + \mu (\nabla \times \vec{u}). \end{aligned}$$

**Teorem 4.14** Neka su  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , diferencijabilna skalarna polja,  $c_r$  konstantno skalarno polje,  $\phi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f[D] \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ , diferencijabilna funkcija i  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Tada je

1.  $\text{grad } c_r = \vec{\mathbf{0}}$ ;

2.  $\text{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{grad } f + \mu \text{grad } g$ ;

3.  $\text{grad}(fg) = g \text{grad } f + f \text{grad } g$ ;

4.  $\text{grad} \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{g \text{grad } f - f \text{grad } g}{g^2}$  (čim je  $g(T) \neq 0$ );

5.  $\text{grad}(\phi \circ f) = \phi'(f) \text{grad } f$ .

**Dokaz:** Tvrdnje su izravna posljedica definicije gradijenta. Primijetimo da je tvrdnja (2) isto što i Teorem 4.13 (1).

**Teorem 4.15** Neka su  $\vec{w}, \vec{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, D \subseteq \mathbb{R}^3$ , diferencijabilna vektorska polja,  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  diferencijabilna skalarna polja,  $\vec{c}$  konstantno vektorsko polje i  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Tada je

1.  $\text{div } \vec{c} = \mathbf{0}$ ;
2.  $\text{div} (\lambda \vec{w} + \mu \vec{u}) = \lambda \text{div } \vec{w} + \mu \text{div } \vec{u}$ ;
3.  $\text{div} (\vec{w} \times \vec{u}) = (\text{rot } \vec{w}) \cdot \vec{u} - \vec{w} \cdot (\text{rot } \vec{u})$ ;
4.  $\text{div} (f \cdot \vec{w}) = (\text{grad } f) \cdot \vec{w} + f (\text{div } \vec{w})$ ;
5.  $\text{div} (f \cdot \text{grad } g) = (\text{grad } f) \cdot (\text{grad } g) + f \Delta g$   
( $g$  dvaput diferencijabilno), pri čemu je

$$\Delta \equiv \text{div grad} = \nabla \cdot \nabla$$

tzv. **Laplaceov diferencijalni operator** (delta), tj.

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

6.  $\text{div}(\text{rot } \vec{w}) = \mathbf{0}$  ( $\vec{w}$  dvaput diferencijabilno).



**Dokaz:** Tvrdnje slijede neposredno iz definicije divergencije. Dokažimo npr. tvrdnju (4)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \cdot \vec{w}) &= \frac{\partial(fw_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fw_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fw_z)}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}w_x + f\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}w_y + f\frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}w_z + f\frac{\partial w_z}{\partial z} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (w_x, w_y, w_z) + f \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = \\ &= (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{w} + f \operatorname{div} \vec{w}. \end{aligned}$$

Primijetimo da se tvrdnja 2. podudara s onom iz Teorema 4.13, 2. Tvrdnja 5. slijedi iz 4. čim je  $\vec{w} = \operatorname{grad} g$ . Napokon, u dokazu tvrdnje 6. treba primijeniti Schwarzov teorem.

**Teorem 4.16** Pod istim pretpostavkama kao u Teoremu 4.15 vrijedi:

$$1. \operatorname{rot} \vec{c} = \vec{0};$$

$$2. \operatorname{rot} (\lambda \vec{w} + \mu \vec{u}) = \lambda \operatorname{rot} \vec{w} + \mu \operatorname{rot} \vec{u};$$

$$3. \operatorname{rot} (\vec{w} \times \vec{u}) = (\operatorname{div} \vec{u}) \vec{w} - (\operatorname{div} \vec{w}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w} - (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u}, \text{ pri čemu su}$$

$$\vec{w} \cdot \nabla \equiv w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z}$$

i, slično,  $(\vec{u} \cdot \nabla)$  novi diferencijalni operatori;

$$4. \operatorname{rot} (f \cdot \vec{w}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{w} - f \operatorname{rot} \vec{w};$$

$$5. \operatorname{rot}(f \cdot \operatorname{grad} g) = (\operatorname{grad} f) \times (\operatorname{grad} g), \text{ i posebice, } \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0};$$

$$6. \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{w}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{w}) - \Delta \vec{w} \\ (\vec{w} \text{ dvaput diferencijabilno}).$$

## Napomena: Diferencijalni operator

$$\vec{w} \cdot \nabla \equiv w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z}$$

shvaćamo kao "skalar", pa on može djelovati i na vektorsko i skalarno polje. Imamo:

- ako je  $f$  diferencijabilno skalarno polje onda je

$$\begin{aligned} (\vec{w} \cdot \nabla) f &\equiv \left( w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \\ &= w_x \frac{\partial f}{\partial x} + w_y \frac{\partial f}{\partial y} + w_z \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{w} \cdot \text{grad } f \end{aligned}$$

- ako je  $\vec{u} \equiv (u_x, u_y, u_z)$  diferencijabilno vektorsko polje onda je

$$\begin{aligned} (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} &\equiv \left( w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (u_x, u_y, u_z) = \\ &= ((\vec{w} \cdot \nabla) u_x, (\vec{w} \cdot \nabla) u_y, (\vec{w} \cdot \nabla) u_z) = \\ &= (\vec{w} \cdot \text{grad } u_x, \vec{w} \cdot \text{grad } u_y, \vec{w} \cdot \text{grad } u_z) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( w_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_x}{\partial z}, w_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_y}{\partial z}, \right. \\
&\quad \left. w_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\
&= w_x \left( \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + w_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \\
&\quad + w_z \left( \frac{\partial u_x}{\partial z}, \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \equiv \\
&\equiv w_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

gdje je

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \equiv \left( \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \equiv \left( \frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \equiv \left( \frac{\partial u_x}{\partial z}, \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

**Dokaz:** Kao i u prethodnom teoremu, sve tvrdnje su izravne posljedice odgovarajućih definicija. Dokažimo npr. tvrdnju 3. Na lijevoj strani je vektorska funkcija

$$\text{rot}(\vec{w} \times \vec{u}) = \text{rot}(w_y u_z - w_z u_y, w_z u_x - w_x u_z, w_x u_y - w_y u_x) =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_y u_z - w_z u_y & w_z u_x - w_x u_z & w_x u_y - w_y u_x \end{vmatrix} =$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} (w_x u_y - w_y u_x) - \frac{\partial}{\partial z} (w_z u_x - w_x u_z) \right),$$

$$, \frac{\partial}{\partial z} (w_y u_z - w_z u_y) - \frac{\partial}{\partial x} (w_x u_y - w_y u_x),$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} (w_z u_x - w_x u_z) - \frac{\partial}{\partial y} (w_y u_z - w_z u_y) \right),$$

a desnoj je vektorska funkcija

$$(\text{div } \vec{u}) \vec{w} - (\text{div } \vec{w}) \vec{u} + (\vec{u} \circ \nabla) \vec{w} - (\vec{w} \circ \nabla) \vec{u} =$$

$$\begin{aligned}
& \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) w_x, \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) w_y, \right. \\
& \quad \left. \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) w_z \right) - \\
& \left( \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) u_x, \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) u_y, \right. \\
& \quad \left. \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) u_z \right) + \\
& + u_x \left( \frac{\partial w_x}{\partial x}, \frac{\partial w_y}{\partial x}, \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + u_y \left( \frac{\partial w_x}{\partial y}, \frac{\partial w_y}{\partial y}, \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \\
& + u_z \left( \frac{\partial w_x}{\partial z}, \frac{\partial w_y}{\partial z}, \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) - \\
& - w_x \left( \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - w_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\
& - w_z \left( \frac{\partial u_x}{\partial z}, \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Sređivanjem se pokazuje da se radi o istoj vektorskoj funkciji.

Primijetimo da je tvrdnja 2. isto što i tvrdnja u Teoremu 4.13, 3., te da 5. slijedi iz 4. primjenom Schwarzova teorema.

**Napomena** Tvrdnja 6. u Teoremu 4.16 smijemo preći ovako:

$$\text{grad div } \vec{w} = \text{rot} (\text{rot } \vec{w}) + \Delta \vec{w},$$

te time dobiti odgovor na pitanje što je gradijent skalarnog polja, koje je divergencija vektorskog polja.

## Usmjerena derivacija

Neka je  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  skalarno polje. Odaberimo bilo koju točku  $T_0 \in \Omega$  i bilo koji vektor  $\vec{l} \in \vec{V}(T_0)$ .

Tada za svaku točku  $T$  na zraci  $l$  određenoj s  $\vec{l}$  vrijedi

$$\overrightarrow{TT_0} = t \vec{l}_0,$$

za neki  $t \in [0, \infty)$ , pri čemu je  $\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{\|\vec{l}\|}$  pripadni jedinični vektor. Broj  $t$  je, zapravo, udaljenost  $d(T_0, T)$  od  $T_0$  do  $T$ .

**Prosječnom promjenom** skalarnoga polja  $U$  **od točke  $T_0$  do točke  $T$**  nazivamo količnik

$$\frac{U(T) - U(T_0)}{d(T_0, T)} = \frac{U(T) - U(T_0)}{t} \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{TT_0} = t \vec{l}_0.$$

Pokazuje se ovdje važnim istražiti granični slučaj  $T \rightarrow T_0$  po  $l$ , tj.  $t \rightarrow 0$ . Da bi navedeni količnik (u graničnom slučaju) imao smisla za svaki izbor jediničnog vektora  $\vec{l}_0$  nužno je da područje  $\Omega$  bude "lokalno konveksno". Dakako, dovoljno je da  $\Omega \equiv D \subseteq \mathbb{R}^3$  bude otvoren skup.



**Definicija 4.17** Neka je  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  skalarno polje. Graničnu vrijednost (ako postoji)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(T) - U(T_0)}{t} \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{TT_0} = t \overrightarrow{l}_0,$$

nazivamo **derivacijom skalarnoga polja  $U$  u točki  $T_0$  u smjeru  $\overrightarrow{l}$**  (ili, kraće, **usmjerenom (skalarnom) derivacijom**) i označujemo s

$$\frac{\partial U(T_0)}{\partial \overrightarrow{l}}.$$

U praktičnom računu je puno jednostavnije baratati predstavnikom  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , skalarnoga polja  $U$  u koordinatnomu sustavu  $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ .

Prvo, točkama  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  i  $T = (x, y, z)$  pripadaju radijus-vektori  $\overrightarrow{OT_0} = x_0 \overrightarrow{i} + y_0 \overrightarrow{j} + z_0 \overrightarrow{k}$  i  $\overrightarrow{OT} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k}$ . Nadalje,  $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_0} + \overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{OT_0} + t \overrightarrow{l}_0$ , dakle,

$$x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k} = \left( x_0 + t \left( \overrightarrow{l}_0 \cdot \overrightarrow{i} \right) \right) \overrightarrow{i} + \\ \left( y_0 + t \left( \overrightarrow{l}_0 \cdot \overrightarrow{j} \right) \right) \overrightarrow{j} + \left( z_0 + t \left( \overrightarrow{l}_0 \cdot \overrightarrow{k} \right) \right) \overrightarrow{k}.$$

Slijedi da se koordinate svake točke  $T$  na zraci što ju određuju  $T_0$  i  $\vec{l}_0$  opisuju linearnim jednažbama

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \left(\vec{l}_0 \cdot \vec{i}\right) t, & y &= y_0 + \left(\vec{l}_0 \cdot \vec{j}\right) t, \\z &= z_0 + \left(\vec{l}_0 \cdot \vec{k}\right) t, & t &\in [0, \infty).\end{aligned}$$

Uočimo: Ovdje je

$$\begin{aligned}\vec{l}_0 &= \left(\vec{l}_0 \cdot \vec{i}\right) \vec{i} + \left(\vec{l}_0 \cdot \vec{j}\right) \vec{j} + \left(\vec{l}_0 \cdot \vec{k}\right) \vec{k} = \\&= \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k},\end{aligned}$$

gdje je  $\alpha = \sphericalangle \left(\vec{l}_0, \vec{i}\right)$ ,  $\beta = \sphericalangle \left(\vec{l}_0, \vec{j}\right)$ ,  $\gamma = \sphericalangle \left(\vec{l}_0, \vec{k}\right)$ .

Proizlazi da je prije definirana usmjerena derivacija, zapravo, derivacija funkcijske kompozicije

$$[0, \infty) \xrightarrow{\vec{w}=(w_x, w_y, w_z)} D \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad \text{tj.}$$

$$t \mapsto \vec{w}(t) = (x_0 + (\vec{l}_0 \cdot \vec{i}) t,$$

$$y_0 + (\vec{l}_0 \cdot \vec{j}) t, z_0 + (\vec{l}_0 \cdot \vec{k}) t) \mapsto f(\vec{w}(t)),$$

u točki  $t = 0$ . Prema tomu,

$$\frac{\partial U(T_0)}{\partial \vec{l}} \equiv \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{l}} = (f \circ \vec{w})'(0) =$$

$$\frac{\partial f(\vec{w}(0))}{\partial x} w'_x(0) + \frac{\partial f(\vec{w}(0))}{\partial y} w'_y(0) + \frac{\partial f(\vec{w}(0))}{\partial z} w'_z(0) =$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} (\vec{l}_0 \cdot \vec{i}) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} (\vec{l}_0 \cdot \vec{j}) +$$

$$+ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} (\vec{l}_0 \cdot \vec{k}) = (\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)) \cdot \vec{l}_0.$$

Time smo dokazali ovaj teorem:

**Teorem 4.18** Derivacija skalarnog polja  $U$ , zadanoga funkcijom  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , u točki  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  u smjeru  $\vec{l}$  ( $\neq \vec{0}$ ) jednaka je skalarnom umnošku pripadnoga gradijenta s jediničnim vektorom  $\vec{l}_0$ , tj. projekciji vektora  $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$  na vektor  $\vec{l}$ :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)) \circ \vec{l}_0.$$

**Primjer 13** Izračunajmo derivaciju skalarnoga polja

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 3yz + 5$$

u točki  $T = (3, 2, -1)$  u smjeru  $\vec{l} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

Po Teoremu 4.18, iz

$$\text{grad } f(3, 2, -1) = (2x, 3z, 3y)|_{(3,2,-1)} = (6, -3, 6), \quad \text{i}$$

$$\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{\|\vec{l}\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

dobivamo da je tražena usmjerena derivacija  $\frac{\partial f(3,2,-1)}{\partial \vec{l}}$  jednaka

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(3,2,-1)}{\partial \vec{l}} &= (\text{grad } f(3,2,-1)) \circ \vec{l}_0 = \\ &= (6, -3, 6) \circ \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Iz Teorema 4.18 slijedi da skalarno polje  $f$  najbrže raste u smjeru što ga određuje  $\text{grad } f$ , odnosno, da najbrže pada u smjeru što ga određuje  $-\text{grad } f$ . Drugim riječima,  $\text{grad } f$  **pokazuje smjer najbrže promjene** skalarnoga polja  $f$ . Štoviše, gradijent se time može i okarakterizirati.

**Teorem 4.19** Neka funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , opisuje diferencijabilno skalarno polje  $U$ . Tada gradijent toga polja u svakoj točki  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  ima za pravac okomicu na razinsku plohu u  $T_0$ , a iznos mu je jednak apsolutnoj vrijednosti pripadne usmjerene derivacije. Sažeto,

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{n}} \vec{n}_0,$$

pri čemu je  $\vec{n}$  normala na razinsku plohu  $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ .

**Dokaz:** Odaberimo bilo koju točku  $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ . Jednadžba pripadne razinske plohe  $U(T) = c \equiv U(T_0)$  prelazi u  $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ , što povlači

$$\begin{aligned} 0 &= df(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} dz = \\ &= (\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)) \circ d\vec{r}, \end{aligned}$$

pri čemu  $d\vec{r}$  označuje vektor  $dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \equiv (dx, dy, dz)$ .

Budući da pratimo zbivanje na razinskoj plohi u točki  $T_0$ , to  $d\vec{r}$  smijemo tumačiti kao infinitezimalni pomak u njezinoj tangencijalnoj ravnini točkom  $T_0$ . Prema tomu,

$$(\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)) \circ d\vec{r} = 0$$

znači da je  $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$  okomit na tu tagencijalnu ravninu, tj. na promatranu razinsku plohu u točki  $T_0$ , dakle, usporedan s pripadnim normalnim vektorom  $\vec{n}$ . Slijedi  $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \vec{n}_0$  pa je

$$\lambda = (\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)) \circ \vec{n}_0.$$

Po Teoremu 4.18 je

$$(\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)) \circ \vec{n}_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{n}},$$

što onda daje

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{n}} \vec{n}_0.$$

**Napomena** Pomoću Teorema 4.18 je lako izračunati jedinični normalni vektor na razinsku plohu skalarnog polja. Naime, za svaku točku  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , vrijedi

$$\vec{n}_0 = \frac{\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)}{\|\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)\|}.$$

**Primjer 14** Izračunajmo jedinični normalni vektor na plohu  $z = xy$  u točki  $T_0 = (2, 3, 6)$ .

Smijemo pretpostaviti da je promatrana ploha  $z = xy$  neka razinska ploha  $f(x, y, z) = c$  nekog skalarnog polja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ . Tako dobivamo

$$f(x, y, z) = xy - z + c,$$

pa je

$$\text{grad } f(2, 3, 6) = (y, x, -1)|_{(2,3,6)} = (3, 2, -1)$$

i, napokon,

$$\vec{n}_0(T_0) = \frac{\text{grad } f(2, 3, 6)}{\|\text{grad } f(2, 3, 6)\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \left( 3 \vec{i} + 2 \vec{j} - \vec{k} \right).$$



Razmotrimo sada kako bi se usmjerena derivacija mogla osmisliti u vektorskom polju. Neka funkcija  $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , predstavlja vektorsko polje  $\vec{V}$ . Promatrajmo opet čvrstu točku  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , varijabilnu točku  $T = (x, y, z)$  i količnik

$$\frac{\vec{w}(x, y, z) - \vec{w}(x_0, y_0, z_0)}{t} \in \mathbb{R}^3,$$

koji opisuje **prosječnu promjenu vektorskoga polja  $\vec{V} \equiv \vec{w}$**  (pri prijelazu iz  $T_0$  u  $T$ ) u smjeru  $\vec{l} \equiv \overrightarrow{T_0T} = t \vec{l}_0$ , pri čemu je dužina  $\overline{T_0T} \subseteq D$ .

**Definicija 4.20** Neka funkcija  $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , predstavlja vektorsko polje  $\vec{V}$ , te neka su  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $T = (x, y, z) \in D$ ,  $\overline{T_0T} \subseteq D$  i  $\overrightarrow{T_0T} = t \vec{l}_0$ . Graničnu vrijednost (ako postoji)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{w}(x, y, z) - \vec{w}(x_0, y_0, z_0)}{t} \in \mathbb{R}^3,$$

nazivamo **derivacijom vektorskoga polja  $\vec{V}$  ( $\vec{w}$ ) u točki  $T_0$  u smjeru  $\vec{l}$**  (ili, kraće, **usmjerenom (vektorskom) derivacijom**) i označujemo s

$$\frac{\partial \vec{V}(T_0)}{\partial \vec{l}} \equiv \frac{\partial \vec{w}(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{l}}.$$

**Teorem 4.21** Derivacija vektorskog polja  $\vec{w}$  u točki  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  u smjeru  $\vec{l}$  ( $\neq \mathbf{0}$ ), ako postoji, jednaka je vrijednosti operatora  $(\vec{l}_0 \circ \nabla)$  primijenjenog na  $\vec{w}$  u  $(x_0, y_0, z_0)$ , tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{w}(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{l}} &= \left( (\vec{l}_0 \circ \nabla) \vec{w} \right) (x_0, y_0, z_0) = \\ &= \left( \vec{l}_0 \circ \text{grad } w_x, \vec{l}_0 \circ \text{grad } w_y, \vec{l}_0 \circ \text{grad } w_z \right)_{(x_0, y_0, z_0)} = \\ &= \left( \cos \alpha \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} \right)_{(x_0, y_0, z_0)} \end{aligned}$$

gdje su  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  i  $\cos \gamma$  smjerovni kosinusi od  $\vec{l}$ , tj. komponente jediničnoga vektora  $\vec{l}_0$ .

(Operator

$$u \circ \nabla = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

smo uveli u Teoremu 4.16)

### Primjer 15 Izračunajmo derivaciju vektorskoga polja

$$(x, y, z) \mapsto \vec{w}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$$

u točki  $T_0 = (1, -\frac{1}{2}, 2)$  u smjeru  $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .

Budući da je  $\vec{l}_0 = \frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$ , po Teoremu 4.21 dobivamo

$$\frac{\partial \vec{w}(1, -\frac{1}{2}, 2)}{\partial \vec{l}} = \left( (\vec{l}_0 \circ \nabla) \vec{w} \right) (1, -\frac{1}{2}, 2) =$$

$$\left( \frac{2\partial \vec{w}}{3\partial x} + \frac{1\partial \vec{w}}{3\partial y} - \frac{2\partial \vec{w}}{3\partial z} \right)_{(1, -\frac{1}{2}, 2)} =$$

$$\left[ \frac{2}{3}(0, z, y) + \frac{1}{3}(z, 0, x) - \frac{2}{3}(y, x, 0) \right]_{(1, -\frac{1}{2}, 2)} =$$

$$\frac{1}{3}(z - 2y, 2z - 2x, 2y + x)_{(1, -\frac{1}{2}, 2)} = \vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}.$$