



## 2.8 Obstoynost implicitno zadane funkcije

Jednadžbu oblika

$$F(x, y) = 0,$$

gdje je  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  neka funkcija dviju varijabla, možemo interpretirati i kao jednadžbu kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable

$$y = f(x), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Jednadžbi  $F(x, y) = 0$  prirodno pridružujemo skup

$$S = \{(x, y) \in D : F(x, y) = 0\}.$$

(neka krivulja u ravnini).

**Definicija 2.22** Za funkciju jedne varijable  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $I \subseteq \mathbb{R}$ , za koju vrijedi

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in I$$

kažemo da je implicitno zadana jednadžbom

$$F(x, y) = 0.$$

Ovo iskazujemo i ekvivalentnim zahtjevom da je graf  $\Gamma_f$  funkcije  $f$  sadržan u skupu  $S$ , odnosno

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in I\} \subseteq S.$$

## Uočimo:

- Ako je jednađžbom  $F(x, y) = 0$  implicitno zadana funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , onda je i svaka restrikcija te funkcije  $f|_{I'} : I' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I' \subseteq I$  implicitno zadana istom jednađžbom ( $\Gamma_{f|_{I'}} \subseteq \Gamma_f \subseteq S$ );
- Često je jednađžbom  $F(x, y) = 0$  implicitno zadano više funkcija, a djelovi od  $S$  su grafovi tih funkcija. Od interesa su slučajevi kad je tom jednađžbom implicitno zadana točno jedna funkcija, tj. kada je  $\Gamma_f = S$ .

## Primjer:

•

$$\underbrace{y - \sqrt{x} + 1}_{F(x,y)} = 0 \implies y = \sqrt{x} - 1.$$

Zadana je funkcija:  $f(x) = \sqrt{x} - 1$ ,  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

- $$\underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{F(x,y)} = 0 \implies y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Ovdje je

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\};$$

centralna kružnica radijusa 1.

Sa  $F(x, y) = 0$  ovdje su implicitno zadano dvije funkcije

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

ali i funkcija

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1, 0.5) \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \in [0.5, 1] \end{cases};$$

**Teorem 2.23** Neka funkcija  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , zadovoljava sljedeće uvjete:

- i)  $(\exists (x_0, y_0) \in D) F(x_0, y_0) = 0$ ;
- ii)  $(\exists a, b \in \mathbb{R}^+) [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] = P \subseteq D$ , tako da je suženje  $F|_P : P \rightarrow \mathbb{R}$  je neprekidno derivabilna funkcija i

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0;$$

Tada postoji interval  $(x_0 - a_0, x_0 + a_0)$ ,  $0 < a_0 \leq a$  i točno jedna neprekidno derivabilna funkcija  $f : (x_0 - a_0, x_0 + a_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 < a_0 \leq a$  takva da je

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{i} \quad F(x, f(x)) = 0$$

za svaki  $x \in (x_0 - a_0, x_0 + a_0)$  i vrijedi

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

pri čemu je  $y = f(x)$ .

Primjer:

Vidjeli smo da su jednadžbom

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{F(x,y)} = 0,$$

zadane dvije funkcije

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

Ovdje je  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  neprekidno derivabilna funkcija na  $\mathbb{R}^2$  i

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

U točki  $(0, 1)$  imamo

$$F(0, 1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 1) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0,$$

pa su sve pretpostavke Teorem 2.23 ispunjene i zato mora postojati interval  $I$  (okolina) oko 0 i točno jedna neprekidno derivabilna funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  zadana implicitno sa  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Očito je

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Međutim

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

ne zadovoljava uvjete jer  $f_1$  nije derivabilna u  $x = -1$  i  $x = 1$ .

Sada je

$$f'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1)} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$(\text{ili } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0).$$

Uočimo da u točki  $(1, 0)$  imamo  $F(1, 0) = 0$ , ali je  $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 0$ , pa Teorem 2.23 nije primjenjiv.

Ovo možemo poopćiti:

Jednadžbu oblika

$$F(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = 0,$$

gdje je  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  možemo interpretirati i kao jednadžbu kojom je implicitno zadana neka funkcija

$$y = f(x_1, \dots, x_m), \quad (x_1, \dots, x_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Jednadžbi  $F(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = 0$  prirodno pridružujemo skup

$$S = \{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in D : F(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = 0\}.$$

(neka ploha u  $\mathbb{R}^{m+1}$ ).

**Definicija 2.24** Za funkciju  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ , za koju vrijedi

$$F(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) = 0, \quad \forall x \in A$$

kažemo da je implicitno zadana jednadžbom

$$F(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = 0.$$

Ovo iskazujemo i ekvivalentnim zahtjevom da je graf  $\Gamma_f$  funkcije  $f$  sadržan u skupu  $S$ , odnosno

$$\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) : (x_1, \dots, x_m) \in A\} \subseteq S.$$



**Teorem 2.25** Neka funkcija  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  otvoren, zadovoljava sljedeće uvjete:

i)  $(\exists (x_1^0, \dots, x_{m+1}^0) \in D) F(x_1^0, \dots, x_{m+1}^0) = 0;$

ii)  $F$  je neprekidno derivabilna funkcija i

$$\frac{\partial F}{\partial x_{m+1}}(x_1^0, \dots, x_{m+1}^0) \neq 0;$$

Tada postoji okolina  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  točke  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  i točno jedna neprekidno derivabilna funkcija  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , takva da je

$$f(x_1^0, \dots, x_m^0) = x_{m+1}^0 \quad \text{i} \quad F(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) = 0$$

za svaki  $(x_1, \dots, x_m) \in A$  i vrijedi

$$f'_{x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1})}{\frac{\partial F}{\partial x_{m+1}}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1})}$$

za  $i = 1, \dots, m$ , pri čemu je  $x_{m+1} = f(x_1, \dots, x_m)$ .

Primjer:

Budući

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \implies z = \pm \sqrt{x^2 + y^2},$$

onda su jednažbom

$$\underbrace{x^2 + y^2 - z^2}_{F(x,y,z)} = 0,$$

zadane dvije funkcije

$$f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f_2(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}, \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ovdje je

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 - z^2 = 0\};$$

kružni stožac s vrhom u  $(0, 0, 0)$ .

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  je neprekidno derivabilna funkcija na  $\mathbb{R}^3$  i

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -2z$$

U točki  $(0, 1, -1)$  imamo

$$F(0, 1, -1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, -1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1, -1) = 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, -1) = 2 \neq 0,$$

pa su sve pretpostavke Teorem 2.25 ispunjene i zato mora postojati okolina  $A$  oko  $(0, 1)$  i točno jedna neprekidno derivabilna funkcija  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  zadana implicitno sa  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Očito je

$$f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}, \quad f : K((0, 1), \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varepsilon \leq 1.$$

Sada je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, -1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, -1)} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1, -1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, -1)} = -\frac{1}{2} = 0$$

(provjeriti deriviranjem  $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ).

Uočimo da u točki  $(0, 0, 0)$  imamo  $F(0, 0, 0) = 0$ , ali je  $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) = 0$ , pa Teorem 2.25 nije primjenjiv.

### 3. Integriranje skalarnih funkcija

#### 3.1 Višestruki integral

Prisjetimo se: Neka je  $f$  omeđena funkcija na segmentu  $[a, b]$  i neka je segment  $[a, b]$  točkama  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$  podijeljen na  $n$  djelova duljina  $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , i neka je  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  (po volji odabran). Tada rastavu segmenta  $[a, b]$ ,

$$D \equiv \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b]) \equiv \mathcal{D},$$

možemo pridjeliti broj, tzv. **integralnu sumu**

$$\begin{aligned} S_\xi(f, D, \xi_1, \dots, \xi_n) &\equiv S_\xi(f, D) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \in \mathcal{D}([a, b]) \equiv \mathcal{D} \end{aligned}$$

Za funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je **integrabilna (u Riemannovom smislu)** ako postoji broj

$$J = J(f) \equiv \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} S_\xi(f, D).$$

Broj  $J$  nazivamo **(Riemannovim) određenim integralom** i označujemo sa

$$J \equiv \int_a^b f(x) dx.$$

Preciznije: Za omeđenu funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je **integrabilna (u Riemannovom smislu)** ako postoji broj  $J = J(f) \in \mathbb{R}$  takav da, za svaki  $\varepsilon > 0$ , postoji neki rastav  $D_0$  segmenta  $[a, b]$  sa svojstvom da za svaki rastav  $D$  što profinjuje  $D_0$  i svaku integralnu sumu  $S_\xi(f, D)$ , bude

$$|S_\xi(f, D) - J| < \varepsilon$$

Simbolički:

$$(\exists J \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists D_0 \in \mathcal{D}) (\forall D \in \mathcal{D}) (\forall S_\xi(f, D))$$

$$D \supseteq D_0 \implies |S_\xi(f, D) - J| < \varepsilon$$

**Napomena:** Ukoliko je  $f(x) \geq 0$  Riemannova suma  $S_\xi(f, D)$  daje aproksimaciju površine ravninskog lika ispod krivulje  $y = f(x)$  za  $x \in [a, b]$ , sumom površina pravokutnika, a određeni integral  $\int_a^b f(x) dx$  daje pravu površinu tog lika.

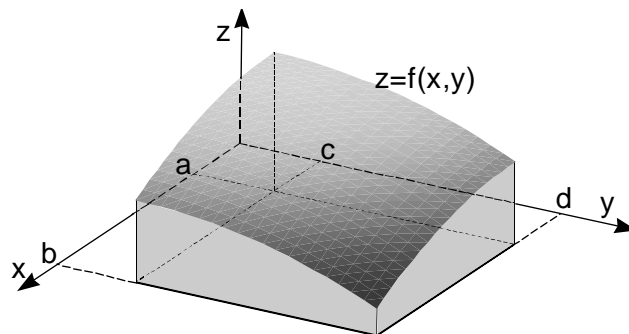
Neka je  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  omeđena funkcija definirana na zatvorenom pravokutniku

$$K = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

i neka je  $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in K$ . Graf  $G_f$  funkcije  $f$  je ploha čija je jednađžba  $z = f(x, y)$ . Označimo sa  $T$  "pseudokvadar" određen s pravokutnikom  $K$  i grafom  $G_f$  funkcije  $f$  nad njim (Slika 1.), tj.

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in K, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Izračunajmo volumen  $V$  tijela  $T$ .



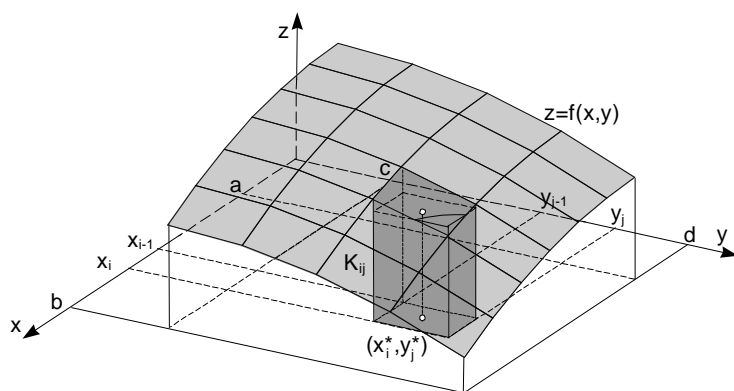
Slika 1.

Postupiti ćemo slično izračunu površine, ovdje upisivajući kvadre koji će aproksimirati volumen odgovarajućeg pseudokvadra. Segment  $[a, b]$  podijelimo diobenim točkama  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  na  $m$  podsegmenta  $[x_{i-1}, x_i]$  duljine  $\Delta x_i$ . Segment  $[c, d]$  podijelimo diobenim točkama  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  na  $n$  podsegmenta  $[y_{j-1}, y_j]$  duljine  $\Delta y_j$ .

Rastavi segmenata  $[a, b]$  i  $[c, d]$  određuju rastav pravokutnika  $K$  na pravokutnike

$$K_{ij} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j \},$$

$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ , površine  $\Delta K_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ . U svakom pravokutniku  $K_{ij}$  odaberimo proizvoljnu točku  $(\xi_i^1, \xi_j^2)$  i volumen kvadra kojemu je baza pravokutnik  $K_{ij}$  i visina  $f(\xi_i^1, \xi_j^2)$  iznosi  $V_{ij} = f(\xi_i^1, \xi_j^2) \Delta K_{ij}$ . Taj volumen možemo uzeti kao aproksimaciju volumena pseudokvadra određenog pravokutnikom  $K_{ij}$  i grafom  $\Gamma_f$  funkcije  $f$  nad njim.



Slika 2.

Jasno je da traženi volumen  $V$  tijela  $T$  možemo aproksimirati zbrojem svih ovako dobivenih  $V_{ij}$ , tj.

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i^1, \xi_j^2) \Delta K_{ij}.$$

Dakako da će aproksimacija volumena  $V$  biti bolja

kada je rastav pravokutnika  $K$  finiji, tj. kada su  $m$  i  $n$  veći, pa stoga možemo uzeti da je

$$V = \lim_{\max\{\Delta K_{ij}\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i^1, \xi_j^2) \Delta K_{ij}.$$

Poopćimo ovo:

Neka je dan kvadar

$$K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Nadalje, neka je za svaki  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , dan rastav segmenta  $[a_i, b_i]$

$$D^i = \{x_0^i, \dots, x_{k_i}^i\} \in \mathcal{D}^i([a_i, b_i]) \equiv \mathcal{D}^i,$$

$x_0^i = a_i < x_1^i < \dots < x_{k_i}^i = b_i$ , kojim je segment  $[a_i, b_i]$  podijeljen na  $k_i$  djelova duljina  $\Delta x_{j_i}^i$ ,  $j_i = 1, \dots, k_i$ .

Direktni produkt

$$D^1 \times \dots \times D^m \equiv D \in \mathcal{D}(K) \equiv \mathcal{D}$$

nazivamo **rastavom** danog kvadra  $K$ . Na ovaj način kvadar  $K$  je rastavljen na  $k_1 \cdot \dots \cdot k_m$  podkvadra oblika

$$[x_{j_{i-1}}^1, x_{j_i}^1] \times \dots \times [x_{j_{m-1}}^m, x_{j_m}^m]$$

$j_i = 1, \dots, k_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , "volumena"  $\Delta x_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot \Delta x_{j_m}^m$ .



Neka je

$$\xi \equiv (\xi_{j_1}^1, \dots, \xi_{j_m}^m)$$

proizvoljno odabrana točka iz svakog podkvadra  $[x_{j_{i-1}}^1, x_{j_i}^1] \times \dots \times [x_{j_{m-1}}^m, x_{j_m}^m]$ .

Nadalje, neka je zadana

$$f : K \equiv [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] \rightarrow \mathbb{R}$$

omeđena funkcija. Rastavu  $D \in \mathcal{D}$  kvadra  $K$ , možemo pridjeliti broj, tzv. **integralnu sumu**

$$\begin{aligned} S_\xi(f, D) &= \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{k_m} f(\xi_{j_1}^1, \dots, \xi_{j_m}^m) \Delta x_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot \Delta x_{j_m}^m. \end{aligned}$$

**Definicija 3.1** Neka je  $f : K \equiv [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] \rightarrow \mathbb{R}$  omeđena funkcija. Kažemo da je  $f$  **integrabilna (u Riemannovom smislu)** ako postoji broj

$$J = J(f) \equiv \lim_{\max\{\Delta x_{j_1}^1, \dots, \Delta x_{j_m}^m\} \rightarrow 0} S_\xi(f, D).$$

Broj  $J$  nazivamo **(Riemannovim) određenim integralom od  $f$**  i označujemo sa

$$J \equiv \int_K f \quad \text{ili} \quad J \equiv \int_K \cdots \int f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m$$

i govorimo o **višestrukom** ( $m$ -**strukom**) **integralu**.

Preciznije: Za omeđenu funkciju

$$f : K \equiv [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] \rightarrow \mathbb{R}$$

kažemo da je **integrabilna (u Riemannovom smislu)** ako postoji broj  $J = J(f) \in \mathbb{R}$  takav da je

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists D_0 \in \mathcal{D}) (\forall D \in \mathcal{D}) (\forall S_\xi(f, D))$$

$$D \supseteq D_0 \implies |S_\xi(f, D) - J| < \varepsilon$$

Specijalno imamo:

- za  $m = 2$

$$J \equiv \iint_K f(x, y) dx dy.$$

- za  $m = 3$

$$J \equiv \iiint_K f(x, y, z) dx dy dz.$$

**Napomena:** Lako je dokazati da za omeđene funkcije  $f$  i  $g$  vrijedi:

1.

$$\int_K (f + g) = \int_K f + \int_K g$$

2.

$$\int_K cf = c \int_K f, c \in \mathbb{R}.$$

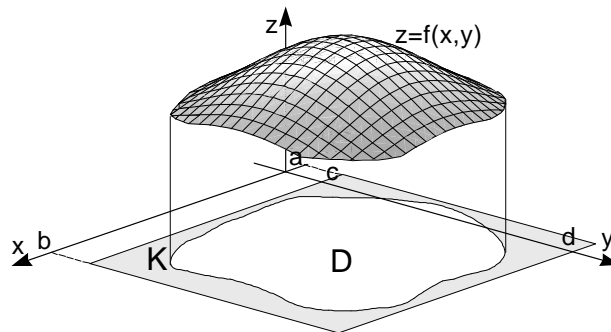
3. Ako je  $f(x_1, \dots, x_m) \leq g(x_1, \dots, x_m)$  za svaki  $(x_1, \dots, x_m) \in K$  tada je

$$\int_K f \leq \int_K g.$$

Za omeđenu funkciju  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , pri čemu je  $D \subset \mathbb{R}^m$  omeđen skup (Slika 3.), pripadni višestruki integral definiramo pomoću njezinoga trivijalnog proširenja

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_m), & (x_1, \dots, x_m) \in D \\ 0, & (x_1, \dots, x_m) \in K \setminus D \end{cases}$$

na neki kvadar  $K \supseteq D$  (takav uvijek postoji jer je  $D$  omeđen).



Slika 3.

Sjetimo se, za  $m = 2$ , interpretacije integrala pozitivne funkcije preko volumena:

- volumen ispod grafa funkcije  $f$  nad  $D$  i volumen ispod grafa funkcije  $\tilde{f}$  nad  $K$  su jednaki, pa ima smisla integral funkcije  $f$  nad  $D$  definirati preko integrala funkcije  $\tilde{f}$  nad  $K$  (lako se vidi da taj integral, ako postoji, ne ovisi o odabranom pravokutniku).

**Definicija 3.2** Neka je  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  omeđena funkcija pri čemu je  $D \subset \mathbb{R}^m$  omeđen skup. Neka je  $K \subset \mathbb{R}^m$  bilo koji pravokutnik što sadrži  $D$ , a funkcija  $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{R}$  trivijalno proširenje funkcije  $f$ . Ako je funkcija  $\tilde{f}$  integrabilna onda **integral** (na  $D$ ) od  $f$  definiramo formulom

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m = \quad (1)$$

$$\int \cdots \int_K \tilde{f}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m.$$

ili kraće

$$\int_D f = \int_K \tilde{f}.$$

**Napomena** Vrijedi:

1.

$$\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g$$

2.

$$\int_D cf = c \int_D f, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Ako je  $D = D_1 \cup D_2$  i  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$  (ili  $\int_{D_1 \cap D_2} f = 0$ )

onda je

$$\int_{D=D_1 \cup D_2} f = \int_{D_2} f + \int_{D_1} f$$

### 3.2 Računanje višestrukih integrala

Prisjetimo se (jednostrukog) integrala realne funkcije jedne varijable kojega, naravno, nismo izračunavali po definiciji, nego primjenom Newton-Leibnizove formule, tj. primjenom neodređenog integrala.

Istu tehniku primijenimo i na dvostruki integral, trostruki integral (i općenito višestruki integral).

Izračun dvostrukog integrala  $\iint_{K=[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy$

svodi na izračun dvaju jednostrukih integrala.

Grubo rečeno: Prvo izračunajmo određeni integral  $\int_c^d f(x,y) dy$  uzimajući da je varijabla  $x$  konstanta.

Rezultat će biti funkcija u varijabli  $x$  i potom nju integrirajmo uzimajući  $a$  i  $b$  kao granice integracije.

Pokazuje se da vrijedi tzv. **Fubinijev teorem**:

**Teorem 3.3 (Fubini)** Neka je  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija, pri čemu je  $K = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  pravokutnik. Tada vrijedi

- $(\forall x \in [a, b])$  funkcija  $y \rightarrow f(x, y)$  je R-integrabilna na  $[c, d]$ ;
- funkcija  $x \rightarrow F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  je R-integrabilna na  $[a, b]$ ;

•

$$\int_K f = \int_{[a,b]} F \quad \text{ili}$$

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Zamjena  $x \longleftrightarrow y$  daje

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Uobičajeni zapis je

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

i pritom kažemo da smo proveli integraciju u redosljedu  $yx$ , odnosno  $xy$ .

**Primjer** Izračunajmo  $I = \iint_K xy^2 dx dy$ ,  $K = [1, 2] \times [0, 1]$ .

$$I = \iint_K xy^2 dx dy = \int_1^2 dx \int_0^1 xy^2 dy =$$

$$\int_1^2 \left( x \left( \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx = \int_1^2 x \left( \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) dx =$$

$$\frac{1}{3} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Dakako, isti se rezultat dobiva i u obrnutom redosljedu integriranja.



**Napomena** Za integral iz prethodnog primjera kažemo da je integral sa separiranim varijablama i on se može jednostavnije izračunati kao umnožak dvaju jednostrukih integrala:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x)g(y)dx dy = \left( \int_a^b f(x)dx \right) \cdot \left( \int_c^d g(y)dy \right).$$

U prethodnom primjeru je

$$\iint_K xy^2 dx dy = \left( \int_1^2 x dx \right) \cdot \left( \int_0^1 y^2 dy \right) =$$

$$\left( \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} \right) \cdot \left( \left( \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

**Napomena** Dokaz Fubinijevog teorema je složen, ali se u slučaju pozitivne funkcije može intuitivno razumijeti tvrdnja teorema. Naime, u slučaju pozitivne funkcije dvostruki integral  $\iint_K f(x, y) dx dy$  je broj koji je jednak volumenu  $V$  odgovarajućeg pseudokvadra. Do izračuna toga volumena možemo doći i na sljedeća dva načina. U prvom slučaju istaknuti dio (Slika 4.(a)) ima volumen

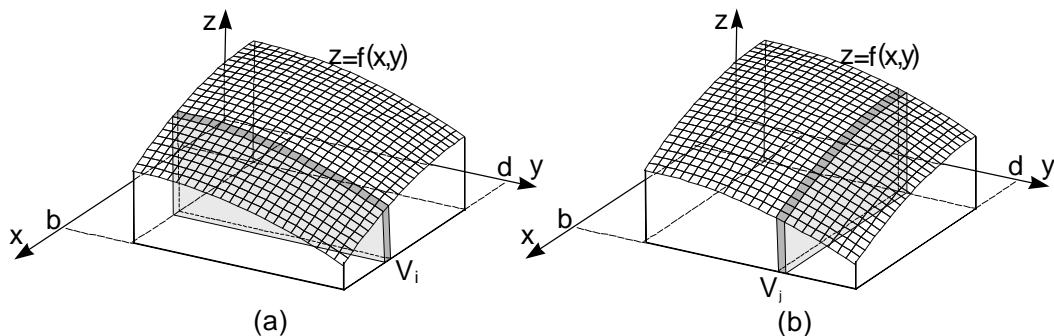
$$V_i \simeq \left[ \int_c^d f(\xi_i^*, y) dy \right] \Delta x_i.$$

Zbroj tih volumena

$$\sum_{j=1}^n V_j = \sum_{j=1}^n \left[ \int_c^d f(\xi_j^*, y) dy \right] \Delta x_j,$$

aproksimira volumen  $V$  i u graničnom slučaju je

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \underbrace{\left[ \int_c^d f(\xi_i^*, y) dy \right]}_{F(\xi_i^*)} \Delta x_i = \\ &= \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$



Slika 4.

U drugom slučaju istaknuti dio (Slika 4.(b)) ima volumen

$$V_j \simeq \left[ \int_a^b f(x, \varsigma_j^*) dx \right] \Delta y_j.$$

Zbroj tih volumena

$$\sum_{j=1}^n V_j = \sum_{j=1}^n \left[ \int_a^b f(x, \varsigma_j^*) dx \right] \Delta y_j$$

aproksimira volumen  $V$  i u graničnom slučaju je

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\max\{\Delta y_j\} \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \left[ \int_a^b f(x, \varsigma_j^*) dx \right] \Delta y_j = \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Ovim računanjem volumena  $V$  na dva načina dobivamo da je zaista

$$\begin{aligned}\iint_K f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.\end{aligned}$$

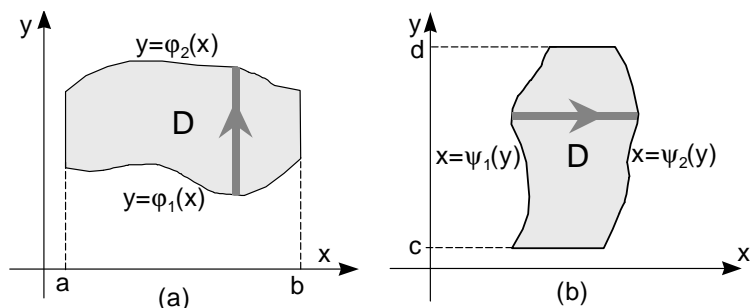
Posebno, kad je definicijsko područje  $D \subset \mathbb{R}^2$  omeđeno grafovima dviju neprekidnih funkcija lako dobivamo, iz formule (1), ovaj teorem:

**Teorem 3.4** Neka je  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, pri čemu je  $D \subset \mathbb{R}^2$  omeđen grafovima neprekidnih funkcija  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi_2$  (Slika 5.(a)). Tada je

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (2)$$

Posve slično, kad je  $D \subset \mathbb{R}^2$  omeđen grafovima neprekidnih funkcija  $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi_1 \leq \psi_2$  (Slika 5.(b)), vrijedi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (3)$$



Slika 5.

Umjesto (2) i (3) uobičajilo se pisati

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx,$$

i pritom smo u prvome slučaju integraciju proveli u redosljedu  $yx$ , a u drugome u redosljedu  $xy$ .

**Primjer** Promijeniti poredak integracije u integralu

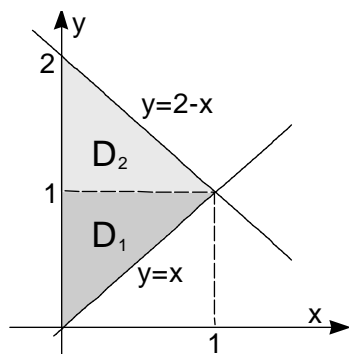
$$I = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} \frac{x}{y} dy$$

i izračunajti njegovu vrijednost.

Područje integracije

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2 - x \end{cases}$$

možemo zapisati i na ovaj način  $D = D_1 \cup D_2$  (Slika 6.),



Slika 6.

gdje je

$$D_1 \cdots \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}, \quad D_2 \cdots \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 - y \end{cases}.$$

Imamo

$$I = \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} =$$

$$\int_0^1 dy \int_0^y \frac{x}{y} dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} \frac{x}{y} dx =$$

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{y} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy + \int_1^2 \left( \frac{1}{y} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=2-y} \right) dy.$$

Iskažimo sada analogone prethodnih teorema u slučaju trostrukog integrala.

**Teorem 3.5** Neka je  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, pri čemu je  $K = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] \subset \mathbb{R}^3$  kvadar. Tada vrijedi:

- $(\forall x \in [a, b])$  funkcija  $(y, z) \rightarrow f(x, y, z)$  je R-integrabilna na  $[c, d] \times [r, s]$ ;
- funkcija  $x \rightarrow F(x) = \int_c^d \left( \int_r^s f(x, y, z) dz \right) dy$  je R-integrabilna na  $[a, b]$ ;

•

$$\int_K f = \int_{[a,b]} F \quad \text{ili}$$
$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz =$$
$$= \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_r^s f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

"Izmijenjujući mjesta" varijablama dobivamo analogne integracijske formule.



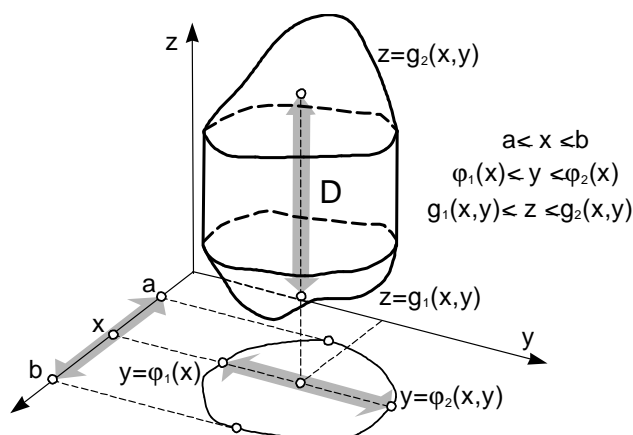
**Teorem 3.6** Neka je  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , funkcija, pri čemu je

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \right. \\ \left. g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \right\},$$

gdje su  $\varphi_1, \varphi_2$  i  $g_1, g_2$  neprekidne funkcije (Slika 7.).

Tada je

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \\ = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \quad (4)$$



Slika 7.

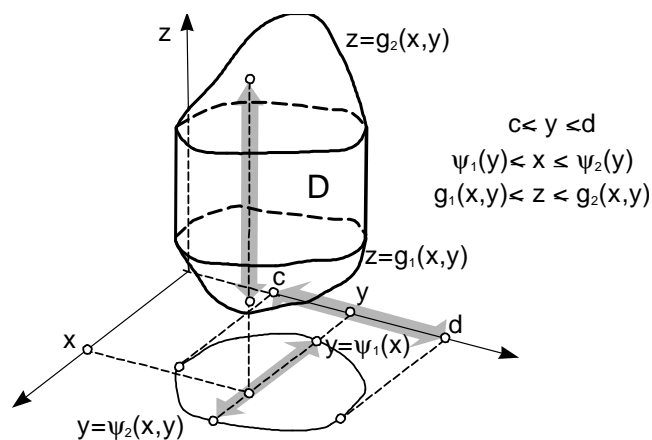
Posve slično, ako je

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \right. \\ \left. g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \right\},$$

gdje su  $\psi_1, \psi_2$  i  $g_1, g_2$  neprekidne funkcije (Slika 8.).

Tada je

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \\ \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left( \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy. \quad (5)$$



Slika 8.

Kao i kod dvostrukog integrala uobičajilo se umjesto zapisa (4) i (5) koristiti

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz, \end{aligned} \quad (5a)$$

i pritom govorimo da smo integraciju proveli u redosljedu  $zyx$ , odnosno redosljedu  $zxy$ .

## Primjer Izračunajmo

$$\iiint_D 2z dx dy dz$$

gdje je  $D \subset \mathbb{R}^3$  omeđen grafovima funkcija  $g_1(x, y) = x^2 + y^2$  i  $g_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Uočimo da promatrane plohe prolaze ishodištem i da se sijeku uzduž jedinične kružnice  $x^2 + y^2 = 1$  u ravnini  $z = 1$ . Budući da između ravnina  $z = 0$  i  $z = 1$  vrijedi  $x^2 + y^2 < \sqrt{x^2 + y^2}$ , to je promatrano tijelo  $D$  određeno nejednadžbama:

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ x^2 + y^2 &\leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Imamo:

$$\begin{aligned} \iiint_D 2z dx dy dz &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} 2z dz = \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[ (z^2) \Big|_{z=x^2+y^2}^{z=\sqrt{x^2+y^2}} \right] dy = \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[ (x^2 + y^2) - \left( (x^2 + y^2)^2 \right) \right] dy =$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (y^2 + x^2 - x^4 - 2x^2y^2 - y^4) dy =$$

$$\int_{-1}^1 \left[ \left( \frac{1}{3}y^3 + x^2y - x^4y - \frac{2}{3}x^2y^3 - \frac{1}{5}y^5 \right) \Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right] dx =$$

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{2}{3} \left( \sqrt{1-x^2} \right)^3 + 2(x^2 - x^4) \sqrt{1-x^2} \right.$$

$$\left. - \frac{4}{3}x^2 \left( \sqrt{1-x^2} \right)^3 - \frac{2}{5} \left( \sqrt{1-x^2} \right)^5 \right] dx = \frac{\pi}{6}$$