

2.3 Parcijalne derivacije viših redova

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, definiramo, kao parcijalne derivacije prvih parcijalnih derivacija $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$ (jer to su funkcije od m varijabli!).

Dakle, ako je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad A_i \subseteq D,$$

derivabilna po varijabli x_j , $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ u točki $T_0 \in A_i$, onda broj

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j} (T_0) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (T_0) \equiv f''_{x_j x_i}$$

nazivamo **druga parcijalna derivacija funkcije f po varijablama x_i i x_j (redom) u točki T_0** .

Ako funkcija f ima sve parcijalne derivacije drugog reda u točki T_0 , $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (T_0)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, onda kažemo da je funkcija f **dvaput derivabilna u točki T_0** .

Neka je $A_{ij} \subseteq D$ skup svih točaka $T \in D$ u kojima $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ima parcijalnu derivaciju drugog reda po varijablama x_i i x_j (redom). Tada dobivamo m^2 funkcija svaka od m varijabli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A_{ij} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

$$T \in A_{ij} \xrightarrow{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(T) \in \mathbb{R}.$$

Funkciju $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A_{ij} \rightarrow \mathbb{R}$ tada nazivamo **druga parcijalna derivacija od f po x_i i x_j (redom)**.

Ako je $A = \bigcap_{i,j=1}^m A_{ij} \subseteq D$, $A \neq \emptyset$ (tada su na A definirane sve $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$) kažemo da je f **dvaput derivabilna na skupu $A \subseteq D$** (i svakom skupu $B \subseteq A$);

Ako je f dvaput derivabilna u svakoj točki $T \in D$ (tj. ako je $A = D$), govorimo o **dvaput derivabilnoj funkciji**.

Slično (induktivno), definiramo i **parcijalne derivacije n -tog reda**.

Teorem 2.6 (Schwartzov) Neka je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, derivabilna na nekoj ε -kugli $K((x_0, y_0); \varepsilon) \subseteq D$ i neka f ima na toj kugli i parcijalnu derivaciju drugoga reda po x i y redom, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Ako je funkcija

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{K((x_0, y_0); \varepsilon)} : K((x_0, y_0); \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

neprekidna u točki (x_0, y_0) , onda postoji parcijalna derivacija drugoga reda funkcije f po y i x redom u točki (x_0, y_0) i pritom je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Dokaz:

Primjer 2.9 Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadanu propisom

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Funkcija f je derivabilna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ i pritom je

$$f'_x(x, y) = y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$f'_y(x, y) = x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Nadalje, obje ove parcijalne derivacije su derivabilne funkcije (na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$) i vrijedi

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = f''_{xy}(x, y).$$

Pogledajmo sada što je s derivabilnošću u točki $(0, 0)$!

Budući da je $f(x, 0) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $f(0, y) = 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, to je f derivabilna i u $(0, 0)$ i $f'_x(0, 0) = 0 = f'_y(0, 0)$. Primijetimo da je

$$f'_x(x, 0) = 0, \quad f'_y(x, 0) = x, \quad f'_x(0, y) = -y, \quad f'_y(0, y) = 0,$$

pa za druge mješovite parcijalne derivacije od f u $(0, 0)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} f''_{yx}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, 0 + \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{xy}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(0 + \Delta x, 0) - f'_y(0, 0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1, \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f je dvaput derivabilna. Međutim, "mješovite" druge parcijalne derivacije $f''_{yx}(0, 0)$ i $f''_{xy}(0, 0)$ su međusobno različite! Uzrok, dakako, leži u prekidnosti funkcije $f''_{xy}(x, y)$ u točki $(0, 0)$.

Napomena Schwartzov teorem možemo poopćiti i na više derivacije (ako su neprekidne), tj. opet nije bitan poredak deriviranja.

Teorem 2.7 Neka su funkciji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ na nekoj ε -kugli $K(T_0; \varepsilon) \subseteq D$ neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo r -tog reda. Ako na toj ε -kugli f ima i sve parcijalne derivacije $(r + 1)$ -vog reda i ako su one sve neprekidne u točki T_0 , onda vrijednosti parcijalnih derivacija $(r + 1)$ -vog reda u točki T_0 ne ovise o redosljedu deriviranja po pojedinim varijablama.

Primjer 2.10 Odredimo sve parcijalne derivacije drugoga reda i treće parcijalne derivacije po x , y i x redom, te po x , x , i y redom (ondje gdje postoje) za funkciju

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2y + x \ln y.$$

Definicijsko područje D je otvorena poluravnina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ i funkcija f je derivabilna. Pritom je, u bilo kojoj točki $(x, y) \in D$,

$$f'_x(x, y) = 2xy + \ln y,$$

$$f'_y(x, y) = x^2 + \frac{x}{y}.$$

Primijetimo da su i obje parcijalne derivacije derivabilne funkcije, tj. da je funkcija f dvaput derivabilna, i da je

$$f''_{xx}(x, y) = 2y, \quad f''_{yx}(x, y) = 2x + \frac{1}{y},$$

$$f''_{xy}(x, y) = 2x + \frac{1}{y}, \quad f''_{yy}(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Napokon, očito je da je f i triput (zapravo, po volji mnogo puta) derivabilna i da je $f'''_{xyx}(x, y) = 2 = f'''_{yxx}(x, y)$.

Uočimo: sve parcijalne derivacije (svih redova) su neprekidne, pa vrijedi Schwartzov teorem.

2.5 Diferencijali viših redova

Diferencijale viših redova definirat ćemo induktivno (slično kao za funkcije jedne varijable). Sjetimo se:

Diferencijal funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ u točki T_0 smo definirali linearan funkcional

$$df(T_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R},$$

gdje je njegova vrijednost u točki (vektoru) $T = T_0 + dT \equiv (x_1, \dots, x_m) = (x_1^0 + dx_1, \dots, x_m^0 + dx_m)$ dana sa

$$\begin{aligned} df(T_0)(T) &= df(T_0)((x_1, \dots, x_m)) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) dx_i \equiv df(T). \end{aligned}$$

Imamo

$$df(T_0) \equiv \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) \cdot d^i \equiv df \in Hom(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$$

Dakle, ako je funkcija diferencijabilna onda je dobro definirana funkcija (**diferencijal** od f)

$$df : D \rightarrow Hom(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}), \quad T \rightarrow df(T)$$

koja svakoj točki $T \in D$ pridjeljuje diferencijal od f u toj točki. Kako je $\text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$, diferencijal od f možemo shvatiti kao vektorsku funkciju

$$df : D \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m, \quad T \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(T), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(T) \right)$$

Definicija 2.8 Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ diferencijabilna funkcija. Ako je diferencijal od f u točki T_0 , $df(T_0)$, diferencijabilna funkcija u točki T_0 , onda kažemo da je f **dvaput diferencijabilna u točki T_0** . Pripadni diferencijal

$$df(df)(T_0) \equiv d^2f(T_0) : D \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$$

nazivamo **drugim diferencijalom od f u točki T_0** , gdje je

$$\begin{aligned} df(df)(T_0)(T) &= d^2f(T_0)(T) = d(df(T_0)(T))(T) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(T_0) \cdot dx_i \cdot dx_j \equiv d^2f(T) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Imamo

$$d^2f(T_0) \equiv \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(T_0) \cdot d^i \cdot d^j \equiv df \in \text{Hom}(\mathbb{R}^{m^2}, \mathbb{R})$$

Ako je diferencijal df diferencijabilna funkcija u svakoj točki iz $T \in D$, tj. ako je f dvaput diferencijabilna u svakoj točki $T \in D$, onda kažemo da je f **dvaput diferencijabilna funkcija**. Tada je dobro definirana vektorska funkcija

$$\begin{aligned} d^2 f &\equiv df(f) : D \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})) \cong \\ &\cong \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m^2} \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^{m^2}, \mathbb{R}) \\ T &\rightarrow d^2 f(T) \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(T), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(T) \right) \end{aligned}$$

koju nazivamo **drugi diferencijal** od f .

Više diferencijale od f u T_0 definiramo induktivno:
Ako je r -ti diferencijal od f

$$d^r f : D \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^{m^r}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m^r}$$

u točki T_0 , $d^r f(T_0)$, diferencijabilna funkcija u točki T_0 , onda $(r + 1)$ -**vi diferencijal od f u točki T_0** definiramo kao

$$df(d^r f)(T_0) = d^{r+1} f(T_0) : D \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^{m^r}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m^r},$$

gdje je

$$\begin{aligned}df (d^r f) (T_0) (T) &= d^{r+1} f (T_0) (T) = d (d^r f (T_0) (T)) (T) = \\&= \sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_{r+1}=1}^m \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{r+1}}} (T_0) \cdot dx_{i_1} \cdots dx_{i_{r+1}} \\&\equiv d^{r+1} f (T) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tada je dobro definirana vektorska funkcija

$$\begin{aligned}d^{r+1} f : D &\rightarrow Hom (\mathbb{R}^m, Hom (\mathbb{R}^{m^r}, \mathbb{R})) \cong \\&\cong \mathbb{R}^{m^{r+1}} \cong Hom (\mathbb{R}^{m^{r+1}}, \mathbb{R})\end{aligned}$$

$$T \rightarrow d^{r+1} f (T) \equiv \left(\frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_1 \cdots \partial x_1} (T), \dots, \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_m \cdots \partial x_m} (T) \right)$$

koju nazivamo $(r + 1)$ -vi **diferencijal** od f .

Za $m = 2$ imamo

$$\begin{aligned}
 d^2 f (T) &\equiv d^2 f (T_0) (T) = \\
 &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (T_0) \cdot dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (T_0) \cdot dx \cdot dy + \\
 &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (T_0) \cdot dy \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (T_0) \cdot dy^2 =
 \end{aligned}$$

(Schwartzov teorem)

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (T_0) \cdot dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (T_0) \cdot dy \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (T_0) \cdot dy^2 \right) \equiv \\
 &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^2 f (T_0)
 \end{aligned}$$

Općenito, zbog Schwartzovog teorema formalno možemo pisati

$$\begin{aligned}
 d^r f (T) &\equiv d^r f (T_0) (T) = \\
 &\sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_r=1}^m \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}} (T_0) \cdot dx_{i_1} \cdots dx_{i_r} = \\
 &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot dx_m \right)^r f (T_0)
 \end{aligned}$$

Primjer Neka je $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^3$. Odredite $d^2 f((1, -1))$, $d^3 f((1, -1))$.

2.6 Egzaktna diferencijalna forma

Promatrajmo funkcije $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, m$. Formalni zbroj

$$f_1 dx_1 + \dots + f_m dx_m,$$

pri čemu su dx_i , $i = 1, \dots, m$, formalne oznake za priraste varijabli, nazivamo **diferencijalnom formom** na D . To je u stvari skalarna funkcija koja svakoj točki $T \in D$ pridružuje vrijednost

$$f_1(T) dx_1 + \dots + f_m(T) dx_m,$$

Primjer Diferencijal diferencijabilne funkcije

$$df(T_0)(T) \equiv df(T) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) dx_i$$

diferencijabilne funkcije f je diferencijalna forma $T \rightarrow df(T)$, gdje je

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Definicija 2.9 Neka su $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, m$ neprekidno derivabilne funkcije. Reći ćemo da je pripadna diferencijabilna forma

$$f_1 dx_1 + \dots + f_m dx_m,$$

egzaktna (ili točna) na otvorenom skupu $A \subseteq D$, ako postoji diferencijabilna funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, za koju je

$$f_1(T) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(T), \dots, f_m(T) = \frac{\partial f}{\partial x_m}(T),$$

tj.

$$df(T) = f_1(T) dx_1 + \dots + f_m(T) dx_m$$

za svaki $T \in A$.

Uočimo: Funkcija iz gornje definicije, ako postoji, ima i sve parcijalne derivacije drugog reda koje su neprekidne funkcije, pa po Schwartzovom teoremu mora biti

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

za sve $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Definicija 2.10 Za skup A kažemo da je **zvjezdast** ako postoji točka $T_0 \equiv (x_1^0, \dots, x_m^0) \in A$, takva da je za svaku točku $T_1 \equiv (x_1^1, \dots, x_m^1) \in A$, dužina

$$\overline{T_0 T_1} =$$

$$\{T \equiv (x_1, \dots, x_m) : x_i = x_i^0 + t(x_i^1 - x_i^0), t \in [0, 1], i = 1, \dots, m\}$$

sadržana u skupu A .

Teorem 2.10 Neka su $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, m$ neprekidno derivabilne funkcije na otvorenom zvjezdastom skupu $A \subseteq D$. Pripadna diferencijalna forma je egzaktna na A ako i samo ako je

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

na A , za sve $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Primjer Ispitajte je li diferencijalna forma

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

egzaktna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Uočimo:

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nije zvjezdast;

- Ako je

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

gdje je

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ i } Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

- Funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ su imaju neprekidne parcijalne derivacije po volji visokog reda.

-

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- forma nije egzaktna na $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- forma je egzaktna na svakom otvorenom pravokutniku koji ne sadrži $(0, 0)$.