



## 2. Diferenciranje skalarnih funkcija

### 2.1 Parcijalne derivacije

Uočimo:

- formalno poopće derivabilnosti u točki (vektoru)

$$T_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in D_f$$

za skalarne funkcije ( $m \geq 2$ ) nije moguće, jer

$$\frac{\Delta f(T)}{\Delta T} \quad (?)$$

nema smisla ("vektor dijeli broj").

- Međutim, promatramo li suženja

$$f_{T_0,i}, \quad i = 1, \dots, m$$

(definiciju vidjeti u pogl. 1.1), koja su, zapravo, funkcije jedne varijable, možemo govoriti o derivabilnosti.

Promatramo funkciju  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  i po volji odabranu točku  $T_0 = (x_0, y_0) \in D$ . Označimo ravnine

$$\Pi_{y_0} \dots y = y_0 \quad \text{i} \quad \Pi_{x_0} \dots x = x_0.$$

Nadalje, neka je

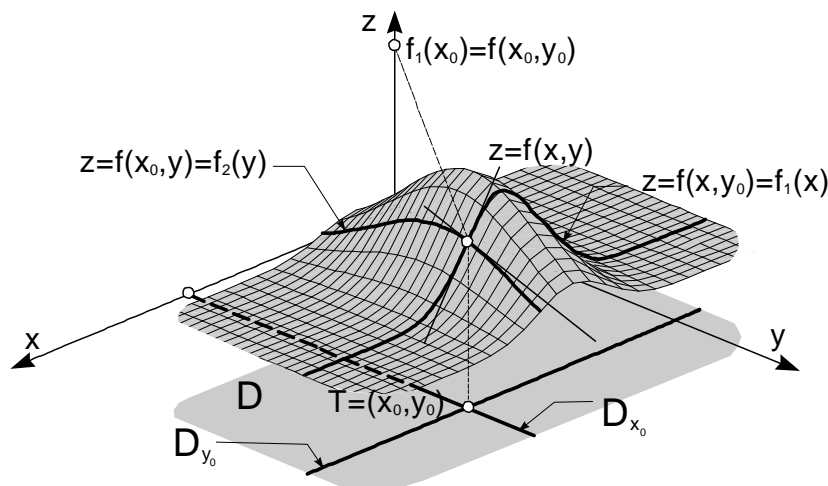
$$D_{y_0} = \Pi_{y_0} \cap D \subseteq D \quad \text{i} \quad D_{x_0} = \Pi_{x_0} \cap D \subseteq D$$

Očito je  $D_{y_0} \neq \emptyset$ ,  $D_{x_0} \neq \emptyset$ , jer sadrže barem točku  $T_0$ .  
Suženja

$$f|_{D_{y_0}} \equiv f_1 : D_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f(x, y_0)$$

$$f|_{D_{x_0}} \equiv f_2 : D_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(y) = f(x_0, y)$$

smijemo smatrati funkcijom jedne varijable, jer se mijenja samo koordinata  $x$ , odnosno  $y$ , redom.



Ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\overbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0)}^{f_1(x_0 + \Delta x)} - \overbrace{f(x_0, y_0)}^{f_1(x_0)}}{\Delta x}}_{f'_1(x_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)$$

onda  $f'_x(x_0, y_0)$  nazivamo prva parcijalna derivacija po  $x$  funkcije  $f$  u točki  $(x_0, y_0)$ . Ako postoji limes

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\overbrace{f(x_0, y_0 + \Delta y)}^{f_2(y_0 + \Delta y)} - \overbrace{f(x_0, y_0)}^{f_2(y_0)}}{\Delta y}}_{f'_2(y_0)} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0)$$

onda  $f'_y(x_0, y_0)$  nazivamo prva parcijalna derivacija po  $y$  funkcije  $f$  u točki  $(x_0, y_0)$ .

**Napomena** Graf  $z=f(x, y)$  funkcije je ploha. Presječemo li tu plohu ravninom  $x = x_0$ , odnosno,  $y = y_0$ , dobit ćemo ravninske krivulje  $\Gamma_2$ , odnosno  $\Gamma_1$ , redom.

Geometrijska interpretacija parcijalnih derivacija  $f'_x(x_0, y_0)$  i  $f'_y(x_0, y_0)$ : to su koeficijenti smjera tangente na  $\Gamma_1$ , odnosno  $\Gamma_2$  u točki  $T_0(x_0, y_0, z_0=f(x_0, y_0))$ .

Neka je dana funkcija  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  i neka točka  $T_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in D$ . Promotrimo skupove

$$D_{T_0,i} = \{T \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D \mid x_j = x_j^0, i \neq j\} \subseteq D$$

$i = 1, 2, \dots, m$ . Uočimo da je u  $D_{T_0,i}$  promjenjiva samo jedna koordinata, pa ga možemo smatrati podskupom od  $\mathbb{R}$ . Suženje

$$f \mid_{D_{T_0,i}} \equiv f_{T_0,i} : D_{T_0,i} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tada smijemo smatrati funkcijom jedne varijable.

**Definicija 2.1** Neka je dana funkcija  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  i neka točka  $T_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in D$ . Neka je dan skup  $D_{T_0,i}$  i suženje  $f_{T_0,i}$  za neki  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Ako postoji derivacija funkcije  $f_{T_0,i}$  u točki  $x_i^0 (\in D_{T_0,i} \subseteq D)$  reći ćemo da funkcija  $f$  ima (prvu) **parcijalnu derivaciju po varijabli  $x_i$  u točki  $T_0$** .

Derivaciju  $(f_{T_0,i})'(x_i^0)$  tada nazivamo (prvom) **parcijalnom derivacijom funkcije  $f$  po varijabli  $x_i$  u točki  $T_0$**  i označujemo sa  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) = f'_{x_i}(T_0)$ .

Dakle, po definiciji je

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f((x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)) - f((x_1^0, \dots, x_m^0))}{\Delta x_i} \\ = \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) = f'_{x_i}(T_0).$$

Ako funkcija  $f$  ima u točki  $T_0$  parcijalnu derivaciju po svakoj varijabli onda kažemo da je funkcija  $f$  **derivabilna u točki  $T_0$** .

Ako je  $f$  derivabilna u svakoj točki  $T \in D$ , nazivamo ju **derivabilnom funkcijom**.

Neka je  $A_i \subseteq D$  skup svih točaka  $T \in D$  u kojima  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ima parcijalnu derivaciju po varijabli  $x_i$ . Tada dobivamo  $m$  funkcija svaka od  $m$  varijabli:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$T \in A_i \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(T) \in \mathbb{R}.$$

Funkciju  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A_i \rightarrow \mathbb{R}$  tada nazivamo (prva) **parcijalna derivacija od  $f$  po  $x_i$**  (na  $A_i$ ).

**Napomena:** Ako želimo naći  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , tada  $f$  treba derivirati po  $x_i$  tako da sve preostale varijable tretiramo kao konstante.

Uočimo:  $f$  je derivabilna akko je  $A_i = D$  za svaki  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

- Ako je  $A = \bigcap_{i=1}^m A_i \subseteq D$ ,  $A \neq \emptyset$  (tada su na  $A$  definirane sve  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ), onda je  $f$  **derivabilna na skupu**  $A \subseteq D$  (i svakom skupu  $B \subseteq A$ );
- Ako je  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija u točki  $T_0 \in A_i$ , onda kažemo da je  $f$  **neprekidno parcijalno derivabilna po varijabli**  $x_i$  u točki  $T_0 \in A_i$ ;
- Ako su sve  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  neprekidne funkcije u točki  $T_0 \in A = \bigcap_{i=1}^m A_i \subseteq D$  (na skupu  $B \subseteq A$ ), onda kažemo da je  $f$  **neprekidno derivabilna** u točki  $T_0 \in A$  (na skupu  $B \subseteq A$ );

**Primjer 2.1** Ispitajte derivabilnost funkcije dane pravilom

$$f(x, y, z) = y + \ln(xy + \sqrt{z}).$$

Imamo:  $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ , gdje je

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \sqrt{z} > 0 \wedge z \geq 0\}.$$

Deriviranjem dobivamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y}{xy + \sqrt{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} : A_x \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 1 + \frac{x}{xy + \sqrt{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} : A_y \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{z}(xy + \sqrt{z})}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} : A_z \longrightarrow \mathbb{R},$$

gdje je

$$A_x = D_f \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \sqrt{z} \neq 0\} = D_f$$

$$A_y = D_f \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \sqrt{z} \neq 0\} = D_f$$

$$A_z = D_f \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{z}(xy + \sqrt{z}) \neq 0\} \neq D_f.$$

Dakle,  $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$  nije derivabilana ( $A_z \neq D_f$ ), ali je (neprekidno) derivabilna na

$$A = A_x \cap A_y \cap A_z = \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \sqrt{z} > 0 \wedge z > 0\}.$$

Sjetimo se da za realne funkcije jedne varijable *derivabilnost povlači neprekidnost*. Sada ćemo pokazati da za funkcije više varijabla to, općenito, *ne vrijedi*.

**Primjer** Pokazali smo da je funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zadana propisom

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

prekidna u točki  $(0, 0)$  ( $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  ne postoji).

Ona je, međutim, derivabilna u točki  $(0, 0)$ . Naime

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x) \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

a slično se pokaže da je i  $f'_y(0, 0) = 0$ .

Dakle:  $f'_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

i  $f'_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

## 2.2 Diferencijabilnost

Prisjetimo se funkcije jedne varijable:

- Definirali smo

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

- Ako je  $f$  derivabilna u  $x_0$  ( $\exists f'(x_0)$ ), onda je

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f(x) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} \right) = \quad (1) \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Označimo  $r(\Delta x) = \Delta f(x) - f'(x_0)\Delta x$ . Iz relacije (1) vidimo da  $r(\Delta x)$  "brže" teži u 0 nego  $\Delta x$ .

To znači da za derivabilnu (diferencijabilnu) funkciju  $f$  u točki  $x_0$  vrijedi

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f'(x_0)\Delta x + r(\Delta x) = f'(x_0)dx + r(\Delta x) = \\ &= df(x) + r(\Delta x) \end{aligned}$$

gdje je  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ .

Funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  će biti diferencijabilna funkcija u točki  $(x_0, y_0) \in D$  ako se prirast

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y) &= f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

dade zapisati u obliku

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y) &= \\ &= f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + r(\Delta x, \Delta y) = \\ &= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + r(\Delta x, \Delta y)\end{aligned}$$

gdje  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ .

Poopćimo ovo.

Promatrajmo funkciju  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  i po volji odabranu točku  $T_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in D$ . Neka je  $T \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D$  bilo koja točka. Uvedimo oznake:

$$x_i - x_i^0 = \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Za bilo koji  $i$  promatrajmo pripadnu funkciju (jedne varijable)  $f_{T_0,i} : D_{T_0,i} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Ako je ta funkcija derivabilna (diferencijabilna) u točki  $x_i^0$ , onda pripadni diferencijal

$$\begin{aligned} df_{T_0,i}(x_i^0) &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ df_{T_0,i}(x_i^0)(x_i) &\equiv df_{T_0,i}(x_i) = f'_{T_0,i}(x_i^0)\Delta x_i = \\ &= f'_{T_0,i}(x_i^0)dx_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0)dx_i \end{aligned}$$

nazivamo **parcijalnim diferencijalom funkcije  $f$  po varijabli  $x_i$**  u točki  $T_0$ .

**Definicija 2.2** Kažemo da je funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  **diferencijabilna u točki  $T_0 \in D$** , ako postoji linearan funkcional  $L$  takav da je

$$\Delta f(T) = f(T) - f(T_0) = L(T - T_0) + r(T - T_0) \quad (2)$$

pri čemu funkcija  $T - T_0 \xrightarrow{r} r(T - T_0) \in \mathbb{R}$  ima svojstvo

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \frac{r(T - T_0)}{\|T - T_0\|} = 0.$$

Napomena: U gornjoj definiciji je

$$\|T - T_0\| = d(T, T_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2}.$$

Linearan funkcional je funkcija  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  oblika

$$\begin{aligned} L(T) &= L((x_1, x_2, \dots, x_m)) = \\ &= a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = A \cdot T \end{aligned}$$

gdje je  $A \equiv (a_1, a_2, \dots, a_m)$  vektor, a  $A \cdot T$  oznaka za skalarni produkt vektora<sup>1</sup>.

Može se pokazati da je linearan funkcional  $L$  u Definiciji 2.2, ako postoji, jedinstven.

Tada  $L$  označujemo s  $df(T_0)$  i nazivamo **diferencijalom funkcije**  $f$  u točki  $T_0$ .

Može se pokazati da je tada

$$\begin{aligned} L(T - T_0) &\equiv df(T_0)(T) = & (3) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) dx_i. \end{aligned}$$

Dakle, diferencijal funkcije  $f$  u točki  $T_0$  je potpuno određen parcijalnim diferencijalima funkcije  $f$  po

<sup>1</sup>  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$  je unitaran prostor nad  $\mathbb{R}$ , pa za svaki linearan funkcional  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  postoji jedinstven vektor  $A \in \mathbb{R}^n$  tako da je  $L(T) = T \cdot A$ .

varijabli  $x_i^0$ , tj. s parcijalnim derivacijama  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0)$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, m$ .

Kraća oznaka:

$$df(T_0)(T) \equiv df(T).$$

Kažemo da je funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  **diferencijabilna na skupu**  $B \subseteq D$ , ako je diferencijabilana u svakoj točki  $T \in B$ .

U slučaju  $B = D$  govorimo o **diferencijabilnoj funkciji**.

Napomena:

- Iz Definicije 2.2 slijedi da se funkcijski prirast  $\Delta f(T)$  u točki  $T = T_0 + dT$ ,  $dT \equiv (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m) = (dx_1, dx_2, \dots, dx_m)$ , diferencijabilne funkcije u točki  $T_0$  može, po volji dobro aproksimirati vrijednošću  $df(T)$ , ako su  $\Delta x_i = dx_i$  dovoljno mali.
- Nadalje, diferencijabilnost povlači derivabilnost, dok obrat općenito ne vrijedi (Za  $m = 1$  to su ekvivalentna svojstva).

**Primjer 2.2** Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

ima u točki  $(0, 0)$  graničnu vrijednost  $0$ ,  $\lim_{(0,0)} f(x, y) = 0$ .  
(Vidjeti Primjer 1.5)

Dakle funkcija

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

je neprekidna u  $(0, 0)$ . Ispitajmo njenu derivabilnost u  $(0, 0)$ . Imamo

$$\begin{aligned} g'_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(0 + \Delta x, 0) - g(0, 0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

a slično se pokaže da je i  $g'_y(0, 0) = 0$ , pa je derivabilna u  $(0, 0)$ .

Pokažimo sada da **nije** diferencijabilna u  $(0, 0)$ . Dakle, treba pokazati da **ne vrijedi**

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Iz (2) i (3) imamo

$$\begin{aligned} & \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ = & \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta g(x, y) - [g'_x(0, 0)\Delta x + g'_y(0, 0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ & \left[ \begin{array}{l} \Delta x = x - 0 = x, \\ \Delta y = y - 0 = y \\ \Delta g(x, y) = g(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - g(0, 0) = g(x, y) \end{array} \right] \\ = & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y) - [0 \cdot x + 0 \cdot y]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Pokažimo da ovaj limes ne postoji:

$$\lim_{\substack{(0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot kx}{(x^2 + (kx)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}},$$

pa funkcija  $\frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$  nema limes u  $(0, 0)$ .