

Plošni integral druge vrste

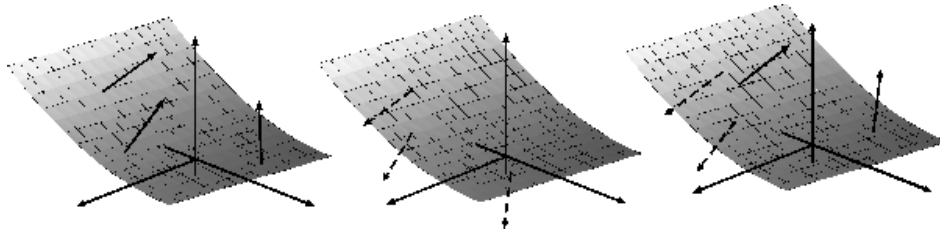
Kao što smo uveli dvije vrste poopćenja (jedno za skalarno, a drugo za vektorsko polje) određenog integrala na integral po krivulji, tako uvodimo i dvije vrste poopćenja dvostrukog integrala na integral po plohi:

- Integral skalarnog polja po plohi smo definirali kao plošni integral prve vrste;
- Sada ćemo definirati integral vektorskog polja po plohi.

Slično slučaju krivuljnog integrala vektorskog polja (po usmjerenoj krivulji), ovdje treba definirati pojam **usmjerene** plohe. Strogo definiranje toga pojma je komplicirano, pa ćemo kratko i jednostavno, samo pojasniti o čemu se radi.

Usmjerenu plohu ćemo definirati pomoću njezinih usmjerenih tangencijalnih ravnina, a usmjerenu ravninu pomoću njezinih normalnih vektora.

U tu svrhu najprije uočimo da ravnina ima **dvije strane** od kojih je jedna određena skupom svih (jediničnih) normalnih vektora \vec{n}_0 , a druga skupom svih $-\vec{n}_0$.



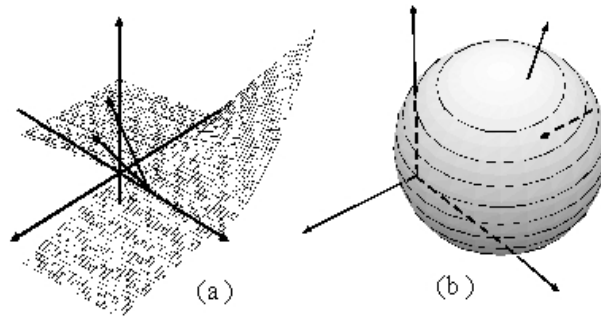
1.slika

Odabirom jedne od tih strana, tj. ili svih \vec{n}_0 ili svih $-\vec{n}_0$, odabrano je jedno od dvaju (neprekidnih) **usmjerenja** (ili **orijentacija**) promatrane ravnine.

(Mješoviti odabir bi tvorilo neko "prekidno usmjerenje"!).

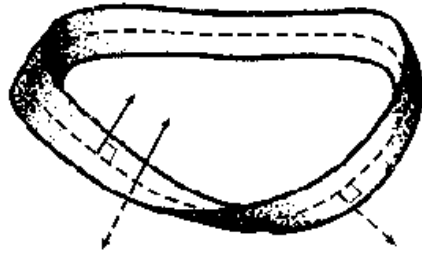
Reći ćemo da je glatka ploha S **usmjerena** (ili **orijentirana**) ako joj je usmjerena svaka tangencijalna ravnina i pritom je to "usmjeravanje neprekidno", tj. opisno govoreće, u bliskim točkama su bliski i pripadni normalni vektori.

Drugim riječima, ploha S je (neprekidno) usmjerena ako ima dvije strane i jedna od njih je odabrana. Smijemo zamisliti da svako (neprekidno) usmjerenje tvore svi jedinični normalni vektori što "izlaze" iz odabrane strane. Pojmovi su ilustrirani slikom 1.



2.slika

- Ako ploha S nije glatka ali je po dijelovima glatka, zahtijevamo (neprekidnu) usmjerenost svakoga glatkog dijela i njihovu međusobnu suglasnost, tj. pripadnost svih normalnih vektora točno jednoj strani te plohe (v. Slika 2. (a)). (Nepostojanje normalnih vektora u točkama "spojnih krivulja" zanemarujemo!)
- Poseban slučaj jesu jednostavno zatvorene plohe (sfera, rub geometrijskog tijela). Budući da one, očito, imaju dvije strane, **vanjsku** i **unutrašnju**, tako ih i usmjerujemo, tj. ili skupom svih vanjskih jediničnih normalnih vektora ili skupom svih onih unutrašnjih (v. Slika 2.(b)).



3.slika

Primjer 3 Möbiusova vrpca je primjer glatke plohe koja se ne može (neprekidno) usmjeriti.

Promatrajmo pravokutnik $ABCD$ pa mu zalijepimo stranicu AD sa stranicom BC i to tako da smo BC "preokrenuli" i identificirali C s A i B s D . Dobit ćemo plohu, tzv. Möbiusovu vrpca.

Pokažimo da Möbiusova vrpca nije usmjeriva ploha!

- Odaberimo bilo koju njezinu točku T_0 i u njoj normalni vektor \vec{n}_0 pa "krenimo kroz njezine normalne vektore u kontinuirani obilazak" po naznačenoj (crtkanoj) jednostavno zatvorenoj krivulji.
- Vrativši se u polaznu točku T_0 pojavit će se normalni vektor $-\vec{n}_0$. Primijetimo da pritom nismo napuštali "odabranu stranu" te plohe (tj. nismo prelazili preko ruba), a na kraju-početku smo se našli na "drugoj strani". To, zapravo, znači da Möbiusova vrpca *ima samo jednu stranu*.

Napomena: Promatrati samo po dijelovima glatke usmjerene plohe. Pritom, ako je ploha S zadana jednažbom $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, jedno usmjerenje određuje izbor jediničnih normalnih vektora

$$\vec{n}_0(x, y) = \frac{-\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right)^2}},$$

a drugo usmjerenje je onda dano vektorima $-\vec{n}_0(x, y)$.

Plohu S usmjerenu vektorima $\vec{n}_0(x, y)$ označujemo sa \widehat{S} , a u drugomu slučaju - sa \widetilde{S} .

Ako je ploha S jednostavno zatvorena, njezino usmjerenje vanjskim normalnim vektorima označujemo sa \widehat{S} , a unutrašnjima - sa \widetilde{S} .

Napokon, ponekad ćemo koristiti i oznaku $d\vec{S}$ za

$$\vec{n}_0(x, y)dS \quad \text{ili} \quad -\vec{n}_0dS.$$

Definicija 5.12 Neka je $\vec{w} = \{w_x, w_y, w_z\} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidna funkcija (vektorsko polje), a $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, jednačba usmjerive glatke plohe $S \subseteq X$, pri čemu je D zatvoreno područje rub kojega je po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja.

Tada dvostruki integral

$$\iint_D \left(-w_x \frac{\partial g}{\partial x} - w_y \frac{\partial g}{\partial y} + w_z \right) (x, y, g(x, y)) dx dy$$

nazivamo **plošnim integralom druge vrste** vektorskoga polja \vec{w} po usmjerenoj plohi \hat{S} i označujemo s

$$\iint_{\hat{S}} \vec{w} \circ d\vec{S} \quad \text{ili} \quad \iint_S \vec{w} \circ \vec{n}_0 dS.$$

Primijetimo da su oznake posve u skladu s definicijom jer je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right)^2} dx dy \quad \text{i}$$

$$\vec{n}_0(x, y) = \frac{-\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right)^2}}.$$

Spomenimo da se plošni integral druge vrste

$$\iint_{\hat{S}} \vec{w} \circ d\vec{S}$$

u fizici naziva **tokom** (ili **fluksom**) vektorskoga polja \vec{w} kroz plohu S .

U slučaju usmjerene po dijelovima glatke plohe \hat{S} , sukladno sastavljene od usmjerenih glatkih ploha $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n$, odgovarajući plošni integral druge vrste definiramo kao pripadni zbroj, tj.

$$\iint_{\hat{S}} \vec{w} \circ d\vec{S} \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{\hat{S}_1} \vec{w} \circ d\vec{S} + \dots + \iint_{\hat{S}_n} \vec{w} \circ d\vec{S}.$$

Za plošni integral druge vrste vrijedi ovaj teorem:

Teorem 5.13 Neka su $\vec{w}, \vec{u} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidne vektorske funkcije, $S \subseteq X$ usmjeriva po dijelovima glatka ploha i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je:

$$1) \iint_{\hat{S}} \vec{w} \circ d\vec{S} = - \iint_{\hat{S}} \vec{u} \circ d\vec{S};$$

$$2) \iint_{\hat{S}} (\lambda \vec{w} + \mu \vec{u}) \circ d\vec{S} = \lambda \iint_{\hat{S}} \vec{w} \circ d\vec{S} + \mu \iint_{\hat{S}} \vec{u} \circ d\vec{S}.$$

Napomena: Pridodajemo još jedan zapis plošnog integrala druge vrste. Zadamo li, formalno, jedinične normalne vektore na S pomoću njihovih smjerovnih kosinusa,

$$\vec{n}_0 = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma \equiv \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

pripadni plošni integral druge vrste ima zapis

$$\iint_{\hat{S}} \vec{w} \circ d\vec{S} = \iint_S (w_x \cos \alpha + w_y \cos \beta + w_z \cos \gamma) dS = \iint_{\hat{S}} w_x dydz + w_y dzdx + w_z dxdy.$$

U svezi s tim, podsjetimo na još jedno definiranje plošnog integrala druge vrste.

Neka su dane neprekidne skalarne funkcije

$$P, Q, R : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^3,$$

i dvostrana ploha $S \subseteq X$, te neka

$$\vec{n}_0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

označuje jedinični normalni vektor na odabranu stranu S^+ plohe S u bilo kojoj točki. Tada se pripadni plošni integral druge vrste "definira" kako slijedi:

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} P dydz + Q dzdx + R dx dy &= \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \end{aligned}$$

(Uočimo da na desnoj strani stoji plošni integral prve vrste!)

Napomena: Ako je usmjeriva glatka ploha S zadana jednačbom $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, onda usmjerenje određuje jedan od jediničnih normalnih vektora

$$\pm \vec{n}_0(x, y) = \pm \frac{-\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right)^2}}.$$

Budući je

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right)^2}},$$

onda je

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|},$$

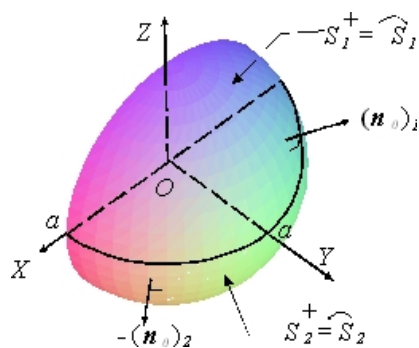
pa je

$$\begin{aligned} & \iint_{S^+} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \\ & = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \\ & \iint_D (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \\ & \iint_D \left(P \frac{\cos \alpha}{|\cos \gamma|} + Q \frac{\cos \beta}{|\cos \gamma|} + R \frac{\cos \gamma}{|\cos \gamma|} \right) dxdy. \end{aligned}$$

Primjer 4 Izračunajmo plošni integral druge vrste

$$\iint_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

pri čemu je S^+ "vanjska" strana "desne" polusfere S središnje sfere zadane jednačbom $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.



4. slika

Rastavimo "desnu" polusferu S na dvije plohe, $S = S_1 \cup S_2$, gdje je

$$S_{1,2} \dots z_{1,2} = g_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

$$(x, y) \in D \dots \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases} .$$

Budući da je S^+ "vanjska strana", to je $S^+ = \widehat{S}_1 \cup \widehat{S}_2$, pa po Teoremu 5.13 slijedi

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \vec{w} \circ d\vec{S} &= \iint_{\hat{S}_1} \vec{w} \circ d\vec{S} + \iint_{\hat{S}_2} \vec{w} \circ d\vec{S} \\ &= \iint_{\hat{S}_1} \vec{w} \circ d\vec{S} - \iint_{\hat{S}_2} \vec{w} \circ d\vec{S}.\end{aligned}$$

Tražene parcijalne derivacije jesu

$$\frac{\partial g_{1,2}(x, y)}{\partial x} = \frac{\mp x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial g_{1,2}(x, y)}{\partial y} = \frac{\mp y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Time smo pripremili sve za za izračunavanje. Dakle,

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy &= \\ &= \iint_{S_1} (x^2 \cos \alpha_1 + y^2 \cos \beta_1 + z^2 \cos \gamma_1) dS - \\ &\iint_{S_2} (x^2 \cos \alpha_2 + y^2 \cos \beta_2 + z^2 \cos \gamma_2) dS\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \left(x^2 \left(-\frac{\partial g_1}{\partial x} \right) + y^2 \left(-\frac{\partial g_1}{\partial y} \right) + z^2 \right) dx dy - \\
&\iint_D \left(x^2 \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x} \right) + y^2 \left(-\frac{\partial g_2}{\partial y} \right) + z^2 \right) dx dy \\
&= \iint_D \left(x^2 \frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + y^2 \frac{2y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right) dx dy = \\
&\stackrel{\text{polarne koordinate}}{=} \iint_{D_{\rho\varphi}} \left(\frac{2\rho^3 \cos^3 \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + \frac{2\rho^3 \sin^3 \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \right) \rho d\rho d\varphi \\
&= 2 \int_0^\pi \left((\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) \int_0^a \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \right) d\varphi = \dots = \frac{\pi a^4}{2}.
\end{aligned}$$

(Izračunajte ovaj plošni integral druge vrste ne rastavljajući plohu S !

Uputa: Odabere li se Y -os "povlaštenom", S dopušta eksplicitnu jednadžbu $y = h(z, x)$.)

Ostrogradski - Gaussova formula

Ovdje ćemo povezati trostruki integral po području $V \subset \mathbb{R}^3$ s plošnim integralom druge vrste po njegovu usmjerenu rubu $\hat{\partial V}$.

Teorem 5.14 (Teorem o divergenciji) Neka je

$$\vec{w} : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^3,$$

neprekidno diferencijabilno vektorsko polje, a $V \subseteq X$ zatvoreno područje omeđeno po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom plohom $\hat{S} \equiv \hat{\partial V}$ usmjerenom vanjskim normalama. Tada vrijedi Ostrogradski-Gaussova formula

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{w} dV = \iint_{\hat{\partial V}} \vec{w} \circ d\vec{S} \quad (= \iint_{\partial V} \vec{w} \circ \vec{n}_0 dS).$$

Dokaz: Dokazat ćemo samo poseban slučaj u kojemu usporednice s koordinatnim osima sijeku rub ∂V u najviše dvjema točkama.

Dadnemo li prednost osi OZ , rub (ploha) dopušta rastav

$$\partial V = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \Gamma \quad (\text{krivulja}),$$

i eksplicitni zapis

$$S_{1,2} \dots z = g_{1,2}(x, y), \quad g_1(x, y) \leq g_2(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

pri čemu se Γ okomito projicira na ∂D .

Usmjerenje vanjskim normalama \vec{n}_0 , tj. $\widehat{\partial V}$, povlači usmjerenje \widehat{S}_1 jediničnim normalama $-\vec{n}_0$ i \widehat{S}_2 jediničnim normalama \vec{n}_0 . Izračunajmo trostruki integral po V , dobivamo

$$\begin{aligned} & \iiint_V \frac{\partial w_z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \\ & = \iint_D \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial w_z(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dx dy = \end{aligned}$$

$$\iint_D w_z(x, y, g_2(x, y)) dx dy - \iint_D w_z(x, y, g_1(x, y)) dx dy.$$

Primijetimo da je $(\vec{w} \circ \vec{k}) \cdot \vec{k} = w_z \vec{k} = \{0, 0, w_z(x, y, z)\}$ pa je

$$\iint_{S_1} (w_z \vec{k} \circ \vec{n}_0) dS = - \iint_D w_z(x, y, g_1(x, y)) dx dy \quad \text{i}$$

$$\iint_{S_2} (w_z \vec{k} \circ \vec{n}_0) dS = \iint_D w_z(x, y, g_2(x, y)) dx dy.$$

Slijedi,

$$\iiint_V \frac{\partial w_z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V} (w_z \vec{k} \circ \vec{n}_0) dS.$$

Posve slično, preferirajući os OX , odnosno, os OY dobivamo

$$\iiint_V \frac{\partial w_x(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial V} (w_x \vec{i} \circ \vec{n}_0) dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial w_y(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial V} (w_y \vec{j} \circ \vec{n}_0) dS.$$

Budući da se integrira po istom području V , odnosno ∂V , zbrajanjem slijedi

$$\iiint_V \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) dx dy dz =$$

$$= \iint_{\partial V} \left(w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k} \right) \circ \vec{n}_0 dS, \quad \text{tj.}$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{w} dV = \iint_{\partial V} \vec{w} \circ \vec{n}_0 dS = \iint_{\hat{\partial V}} \vec{w} \circ d\vec{S}.$$

Napomena: Često se Ostrogradski-Gaussova formula zapisuje pomoću skalarnih funkcija. Neka su

$$P, Q, R : X \rightarrow \mathbb{R}$$

neprekidno derivabilne funkcije na okolini X zatvorenog područja $V \subset \mathbb{R}^3$, rub ∂V kojega je po dijelovima glatka jednostavno zatvorena ploha. Tada je

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_{\partial V} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \end{aligned}$$

gdje su $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ smjerovni kosinusi vanjske normale na plohu ∂V .

Primjer 5 Izračunajmo plošni integral druge vrste

$$\iint_{\hat{S}} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

po sferi $\hat{S} \dots x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ usmjerenoj vanjskim normalama.

Imamo da je

$$\iint_{\hat{S}} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \iint_{\hat{S}} \vec{w} \circ d\vec{S},$$

pri čemu je $\vec{w} = \{w_x, w_y, w_z\}$, $w_x(x, y, z) = x^3$, $w_y(x, y, z) = y^3$ i $w_z(x, y, z) = z^3$, te da smijemo primijeniti Teorem o divergenciji. Prema tomu,

$$\iint_{\hat{S}} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \iint_{\hat{S}} \vec{w} \circ d\vec{S} =$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{w} dV = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dxdydz =$$

$$\stackrel{\text{sferne koordinate}}{=} \iiint_{V_{r\theta\varphi}} 3r^2 \cdot r^2 \sin \theta \cdot dr d\theta d\varphi =$$

$$3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\sin \theta \int_0^a r^4 dr \right) d\theta \right) d\varphi = \dots = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

Stokesova formula

Sjetimo se Greenove formule

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\hat{\partial}D} P dx + Q dy$$

kojom se dvostruki integral po ravninskom područje D prevodi na krivuljni integral druge vrste po njegovu rubu. Stavimo li $\vec{w} = \{P, Q\}$, dobivamo njezin vektorski zapis:

$$\iint_D \left(\text{rot } \vec{w} \circ \vec{k} \right) dx dy = \oint_{\hat{\partial}D} \vec{w} \circ d\vec{r} \quad \left(= \oint_{\partial D} \vec{w} \circ \vec{t}_0 ds \right)$$

Stokesova formula će biti poopćenje Greenove formule na prostorno vektorsko polje \vec{w} , plohu $S \subset \mathbb{R}^2$ i njezin rub ∂S .

Prije samoga iskaza treba definirati sukladno usmjerenje plohe i njezina ruba.

Kao što smo se već dogovorili, plohu S zadanu jednadžbom

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

usmjerenu jediničnim normalnim vektorima

$$\vec{n}_0(x, y) = \frac{-\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right)^2}}$$

označujemo sa \widehat{S} , a usmjerenu normalama $-\vec{n}_0(x, y)$ - sa \widehat{S} . Usmjerimo rub ∂D (po dijelovima glatku jednostavno zatvorenu ravninsku krivulju) područja D pozitivno, tj. kao $\widehat{\partial D}$ ("pravilo desne ruke" kad je palac usmjeren kao vektora \vec{k}), pa mu pridijelimo parametrizaciju (s porastom parametra)

$$\widehat{\partial D} \dots x = \phi(t), y = \psi(t), \quad t \in [a, b].$$

Budući da se rub ∂S (po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja) okomito projicira na ∂D i S dopušta parametrizaciju

$$S \dots r(x, y) = (x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in D,$$

to se usmjerenje s $\widehat{\partial D}$ "prenosi" na ∂S (porastom parametra), označimo ga kao $\widehat{\partial S}$, tj.

$$\begin{aligned} \widehat{\partial S} \dots r(\phi(t), \psi(t)) &\equiv \rho(t) = \\ &= (\phi(t), \psi(t), g(\phi(t), \psi(t))), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Pritom govorimo da su ploha \widehat{S} i njezin rub $\widehat{\partial S}$ **sukladno usmjereni**.

Dakako, u slučaju negativnoga usmjerenja $\widehat{\partial D}$ dobivamo odgovarajuće usmjereni rub $\widehat{\partial S}$, pa i tada kažemo da su ploha \widehat{S} i njezin rub $\widehat{\partial S}$ sukladno usmjereni. Primijetimo da se u oba slučaja radi o poštivanju "pravila desne ruke" kad je palac usmjeren kao normalni vektor.

Teorem 5.15 (Stokesov teorem) Neka je $\vec{w} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidno diferencijabilna vektorska funkcija, $\widehat{S} \subseteq X$ usmjeren po dijelovima glatka ploha, a $\widehat{\partial S}$ sukladno joj usmjereni rub koji je po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja. Tada vrijedi **Stokesova formula**

$$\iint_{\widehat{S}} \text{rot } \vec{w} \circ d\vec{S} = \oint_{\widehat{\partial S}} \vec{w} \circ d\vec{r} \quad \left(= \oint_{\partial S} \vec{w} \circ \vec{t}_0 ds \right).$$

Napomena: Kako za Greenovu tako se i za Stokesovu formulu često rabi skalarni zapis. U tu svrhu, neka su

$$P, Q, R : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^3,$$

neprekidno derivabilne funkcije, a $S \subseteq X$ po dijelovima glatka ploha s rubom ∂S po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom krivuljom. Tada se pripadna Stokesova formula zapisuje kako slijedi:

$$\oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS,$$

pri čemu su $\cos \alpha$, $\cos \beta$ i $\cos \gamma$ smjerovni kosinusi normalnih vektora na plohu S sukladno usmjereni s rubom ∂S .

Primjer 6 Izračunajmo cirkulaciju vektorskog polja

$$(x, y, z) \mapsto \vec{w}(x, y, z) = \{x^2y^3, 1, z\}$$

duž usmjerenoga ruba $\widehat{\partial S}$ plohe S zadane jednadžbom $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

Najprije, iz dane jednadžbe slijedi

$$S \dots z = g(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2},$$

$$(x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Budući da sukladno usmjerenje (s rubom $\widehat{\partial S}$) na S znači \widehat{S} usmjerenu normalama \vec{n}_0 (s obzirom na g), to

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}},$$
$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}$$

povlači

$$\vec{n}_0(x, y) = \left\{ \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{2}} \right\} \quad \text{i}$$

$$dS = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

Tako dobivamo

$$\iint_{\hat{S}} \text{rot } \vec{w} \circ d\vec{S} = \oint_{\hat{\partial S}} w_x dx + w_y dy + w_z dz \quad \text{Stokesova formula}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS = \end{aligned}$$

$$= \iint_D \left((0 - 0) \frac{x}{\sqrt{2}} + (0 - 0) \frac{y}{\sqrt{2}} + \right.$$

$$\left. (0 - 3x^2 y^2) \frac{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} dx dy =$$

$$= -3 \iint_D x^2 y^2 dx dy \quad \text{polare Koordinate}$$

$$-3 \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \int_0^2 \rho^5 d\rho \right) d\varphi = -\pi.$$