Neka posebna vektorska polja

Definicija 4.22

- Reći ćemo da je vektorsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, **potencijalno** (ili **konzervativno**), ako postoji neko skalarno polje $f : D \to \mathbb{R}$ takvo da je $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = -\operatorname{grad} f$. Pritom polje f nazivamo (skalarnim) **potencijalom** od $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$.

- Za vektorsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ kažemo da je **bezvrtložno** ako je $\operatorname{rot} \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. U protivnom, $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ nazivamo **vrtložnim** poljem.

- Napokon, reći ćemo da je vektorsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ **solenoidalno** čim je $\operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = 0$.

Napomena Negativni predznak u definiciji potencijalnog polje nije bitan jer je $\operatorname{grad}(-f) = -\operatorname{grad} f$. Radi se samo u ustaljenom dogovoru, kojemu je pridijeljeno stanovito fizikalno značenje.

Primjer 16 Jednostavno je provjeriti da je gravitacijsko polje tvarne točke T_0 s masom m_0, tj.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{G}} = K \cdot \frac{m_0}{r^2} \overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0,$$

K - konstanta i $r \equiv \left\| \overrightarrow{\boldsymbol{r}} \right\|$- udaljenost, potencijalno s potencijalom

$$U = K \cdot \frac{m_0}{r}.$$

(Uzmemo li T_0 za ishodište koordinatnog sustava $\left(O; \overrightarrow{\boldsymbol{i}}, \overrightarrow{\boldsymbol{j}}, \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right)$, potencijal U je zadan skalarnom funkcijom

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = K \cdot \frac{m_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

a gravitacijsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{G}}$ vektorskom funkcijom

$$(x, y, z) \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{w}}(x, y, z) = K \cdot m_0 \cdot \frac{x \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + z \overrightarrow{\boldsymbol{k}}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Teorem 4.23 Neka je $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} : D \to \mathbb{R}^3$ diferencijabilno vektorsko polje na konveksnom skupu $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada je $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ potencijalno onda i samo onda, ako je bezvrtložno, tj.

$$(\exists f : D \to \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = -\operatorname{grad} f \iff \operatorname{rot} \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

Dokaz: Ako je vektorsko polje w potencijalno s potencijalom f, onda je (v. Teorem 4.16 (5)):

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \operatorname{rot}(-\operatorname{grad} f) = -\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

Obratno, neka je, pod danim pretpostavkama, vektorsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (w_x, w_y, w_z)$ bezvrtložno, tj. $\operatorname{rot} \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Da bismo dokazali njegovu potencijalnost, treba konstruirati skalarno polje f tako da $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ bude njegov (negativni) gradijent. Jednostavnosti radi, konstrirat ćemo f u posebnom slučaju kad je D kvadar. Prvo primijetimo da $\operatorname{rot} \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ povlači

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y}.$$

Budući da je D kvadar, dobro je definirana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} w_x(t,y,z)dt - \int_{y_0}^{y} w_y(x_0,s,z)ds -$$

$$-\int_{z_0}^{z} w_z(x_0,y_0,v)dv,$$

pri čemu je $(x_0, y_0, z_0) \in D$ bilo koja čvrsta točka. Izravno se lako dokaže da je $\frac{\partial f}{\partial x} = -w_x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -w_y$ i $\frac{\partial f}{\partial z} = -w_z$. Primjerice,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-\int_{x_0}^{x} w_x(t,y,z)dt - \int_{y_0}^{y} w_y(x_0,s,z)ds$$

$$-\int_{z_0}^{z} w_z(x_0,y_0,u)du =$$

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{\partial w_x(t,y,z)}{\partial z}dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial w_y(x_0,s,z)}{\partial z}ds - w_z(x_0,y_0,z) =$$

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{\partial w_z(t,y,z)}{\partial t}dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial w_z(x_0,s,z)}{\partial y}ds - w_z(x_0,y_0,z) =$$

$$-w_z(x,y,z)+w_z(x_0,y,z)-w_z(x_0,y,z)+w_z(x_0,y_0,z)-$$

$$-w_z(x_0,y_0,z)=-w_y(x,y,z).$$

Dakle, $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}=-\operatorname{grad} f$, što smo i tvrdili.

Primjer 17 Istražimo je li vektorsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ u Primjeru 15 konzervativno i ako jest odredimo mu potencijal. Vektorsko polje

$$(x,y,z)\mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{w}}(x,y,z)=(yz,zx,xy)$$

je diferencijabilno na $\mathbb{R}^3$. Po Teoremu 4.23, njegova možebitna konzervativnost je ekvivalentna bezvrtložnosti. Budući da je

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{\boldsymbol{w}}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=$$

$$(x-x,-y+y,z-z)=(0,0,0),$$

to $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ jest konzervativno polje. Da bismo mu odredili potencijal, postupimo kao u dokazu prethodnoga teorema, tj. (odabravši za T_0 ishodište $O=(0,0,0)$)

$$f(x,y,z)=-\int_0^x w_x(t,y,z)dt-\int_0^y w_y(0,s,z)ds-$$

$$-\int_0^z w_z(0,0,v)dv=$$

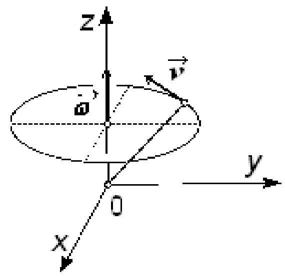
$$-\int_0^x yzdt-\int_0^y z\cdot 0ds-\int_0^z 0\cdot 0dv=-xyz$$

ili, općenitije, $f(x,y,z)=c-xyz$, pri čemu je $c\in\mathbb{R}$ bilo koja konstanta.

Primjer 18 Tvarna točka T se vrti stalnom kutnom brzinom $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ oko čvrste osi. Izračunajmo rotaciju pripadnoga vektorskog polja njezine brzine $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$.

Promatrajmo ovo zbivanje u provokutnom koordinatnom sustavu $(O;\overrightarrow{\boldsymbol{i}},\overrightarrow{\boldsymbol{j}},\overrightarrow{\boldsymbol{k}})$, pri čemu neka je os z navedena čvrsta os. Iz "elementarne" fizike znamo da je tada

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}=\omega\overrightarrow{\boldsymbol{k}},\ \omega\equiv\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}\right\|,\quad \text{i}\quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}}=\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}\times\overrightarrow{\boldsymbol{r}},\ \overrightarrow{\boldsymbol{r}}\equiv\overrightarrow{OT}$$



Dakle, za vektorsko polje

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_x(x,y,z), v_y(x,y,z), v_z(x,y,z)) \equiv \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(x,y,z)$$

dobivamo:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega y, \omega x, 0).$$

Napokon, za rotaciju toga polja proizlazi

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2\omega),$$

tj.

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 2\omega\overrightarrow{\boldsymbol{k}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}},$$

odnosno,

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{v}}.$$

Zaključujemo da je $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{v}}$ kutna brzina rotirajuće točke (brzinom $\vec{\boldsymbol{v}}$ oko čvrste osi).

Ovo ima veze s nazivom rotacija. U ovomu svjetlu jasnija je i definicija (bez)vrtložnog vektorskog polja $\vec{\boldsymbol{v}}$. Naime, svaka (tvarna) točka $T \in D$ u kojoj je

$$\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{v}}(T) \neq 0$$

nužno je zahvaćena nekim "vrtložnim" gibanjem.

Teorem 4.24 Neka je $\vec{\boldsymbol{w}} : X \to \mathbb{R}^3$ diferencijabilno vektorsko polje na otvorenom kvadru $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada je w solenoidalno onda i samo onda, ako postoji dvaput diferencijabilno vektorsko polje $\vec{\boldsymbol{u}} : X \to \mathbb{R}^3$ rotacija kojega je $\vec{\boldsymbol{w}}$, tj.

$$\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{w}} = 0 \Leftrightarrow (\exists \vec{\boldsymbol{u}} : D \to \mathbb{R}^3)\ \vec{\boldsymbol{w}} = \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{u}}.$$

Po sličnosti sa skalarnim potencijalom f ($\vec{\boldsymbol{w}} = -\operatorname{grad} f$), vektorsko polje $\vec{\boldsymbol{u}}$ sa svojstvom $\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{w}}$ naziva **vektorskim potencijalom** vektorskoga polja $\vec{\boldsymbol{w}}$.

Dokaz: Ako za vektorsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ postoji vektorsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ takvo da je $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \operatorname{rot} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, onda je (v. Teorem 4.15 (6))

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = 0.$$

Da bismo dokazali nužnost, definirajmo $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_y, u_z)$ kako slijedi:

$$u_x(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} w_y(x, y, s)ds;$$

$$u_y(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} w_x(x, y, s)ds + \int_{x_0}^{x} w_z(t, y, z_0)dt,$$

$$u_z(x, y, z) = 0,$$

$(x_0, y_0, z_0) \in D$ po volji odabrana čvrsta točka.

Budući da je vektorsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ diferencijabilno, to je $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ dvaput diferencijabilno. Parcijalno derivirajući koordinatne funkcije u_x, u_y i u_z dobivamo:

$$\frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial w_y(x,y,s)}{\partial y} ds,$$

$$\frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial z} = w_y(x,y,z);$$

$$\frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial x} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial w_x(x,y,s)}{\partial x} ds + w_z(x,y,z_0),$$

$$\frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial z} = -w_x(x,y,z);$$

$$\frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial y}.$$

Slijedi,

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = w_x \quad \text{i} \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = w_y,$$

dok je

$$\frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial y} =$$

$$= -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial w_x(x,y,s)}{\partial x} ds + w_z(x,y,z_0) - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial w_y(x,y,s)}{\partial y} ds =$$

$$\int_{z_0}^{z} \left(-\frac{\partial w_x(x,y,s)}{\partial x} - \frac{\partial w_y(x,y,s)}{\partial y} \right)) ds + w_z(x,y,z_0) \overset{(\operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{w}}=0)}{=}$$

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial w_z(x,y,s)}{\partial s} ds + w_z(x,y,z_0) =$$

$$= w_z(x,y,z) - w_z(x,y,z_0) + w_z(x,y,z_0) = w_z(x,y,z).$$

Prema tomu, konstruirali smo takvo vektorsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ da je $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \operatorname{rot} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$.

Napomena: Teorem 4.24 pokazuje da su, na prikladnom području, postojanje vektorskiog potencijala i solenoidalnost vektorskog polja ekvivalentna svojstva. Teorem 4.24 vrijedi i na općenitijem skupu $D \subseteq \mathbb{R}^3$ nego što je otvoreni kvadar, koji je ovdje odabran da se pojednostavni dokaz. Ipak, nije moguće otvoreni kvadar zamijeniti bilo kojim otvorenim skupom.

Neka je, primjerice, D_1 otvoreni skup između dviju središnjih koncentričnih sfera polumjera c_1 i c_2, $0 < c_1 < c_2$, i neka je na njemu vektorsko polje

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{r^2}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0,$$

pri čemu je $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = x\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + z\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$, $r \equiv \|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\|$ i $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r}$.
Jednostavni račun pokazuje da je $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}$ solenoidalno polje, tj. $\operatorname{div}\overrightarrow{\boldsymbol{V}} = 0$. Međutim, nije teško dokazati da nema vektorskog polja na D_1 rotacija kojega bi bila polje $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}$, tj. za svaki $\overrightarrow{\boldsymbol{U}} : D_1 \to \mathbb{V}$ je $\operatorname{rot}\overrightarrow{\boldsymbol{U}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{V}}$.
I upravo je tako odabrano područje D_1 smetnja za postojanje vektorskog potencijala. Naime, ako iz D_1 izbacimo npr. točke što pripadaju Z-osi, na tomu području D_2 vektorsko polje $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}$ ima vektorski potencijal $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}$.

U dokazu, pri definiranju vektorskoga polja u, odabrali smo $u_z = 0$. To, dakako, nije nužno. Mogli smo, naime, tako definirati neku inu koordinatnu funkciju, ali se onda preostale dvije moraju definirati netrivijalno. Naravno, ni takvo definiranje nije neophodno jer se sve tri koordinatne funkcije mogu definirati kao netrivijalne.

5.4 Krivuljni integral

- Krivuljni integral je na neki način poopćenje određenog integrala na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ na određeni integral po krivulji Γ zadanoj odgovarajućom parametrizacijom;

- Postoje dvije vrste krivuljnog integrala:

  – za skalarna polja;

  – za vektorska polja.

Krivulja i njeno usmjerenje

Ovdje ćemo formulirati pojam krivulje u $\mathbb{R}^3$ s provokutnim koordinatnim sustavom $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, svijesni manjkavosti što proizlaze iz svijesnog zaobilaženja razlike između parametrizabilnog skupa i krivulje.

Definicija 5.1 Skup $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ nazivamo **jednostavnom glatkom krivuljom** (s rubom) ako:

i) postoji neprekidno derivabilna vektorska funkcija $\overrightarrow{r} = \{\phi, \psi, \chi\}$ takva da je $r = (\phi, \psi, \chi) : [a, b] \to \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ bijekcija;

ii) za svaki $t \in [a, b]$ je $\overrightarrow{r}'(t) \neq (0, 0, 0)$, tj. Γ dopušta tangentu u točki $r(t)$.

Svaki takav uređeni

$$par([a, b], \overrightarrow{r})$$

nazivamo **glatkom parametrizacijom** krivulje Γ.

Za $A = r(a)$, $B = r(b) \in \Gamma$ kažemo da su **rubne točke** od Γ.

Ako funkcija r nije injektivna samo u točkama a i b, tj. ako je $r(a) = r(b)$, govorimo o **jednostavno zatvorenoj** krivulji Γ.

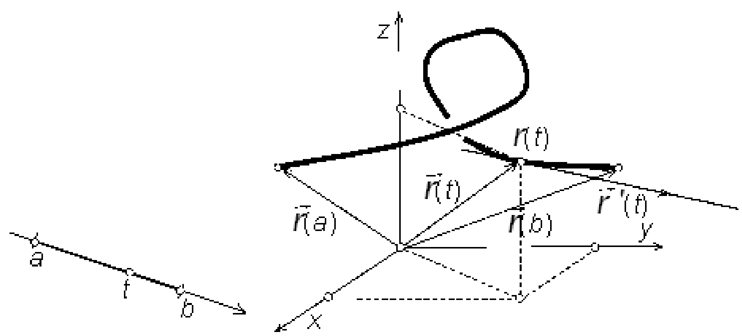
Napomenimo da

$$\overrightarrow{r}(t) = \phi(t)\overrightarrow{i} + \psi(t)\overrightarrow{j} + \chi(t)\overrightarrow{k}, \quad t \in [a,b]$$

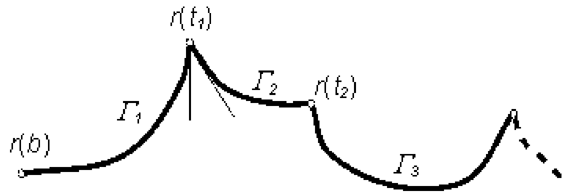
nazivamo **vektorskim zapisom**, a istaknemo li koordinatne funkcije vektorske funkcije $\overrightarrow{r}$, tj.

$$x = \phi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \quad t \in [a,b]$$

dobivamo tzv. **parametarski zapis** (parametarske jednadžbe) krivulje Γ.



U praksi često nastupa malo općenitiji slučaj od "glatkoga" u smislu da postoji (najviše) konačno točaka u kojima se ”krivulja Γ oštro lomi”, tj. ne dopušta tangentu. Tada je definicijskom uvjetu ii) udovoljeno svuda osim u konačno mnogo točaka $t_1, \cdots, t_n \in [a,b]$. U tom slučaju govorimo o **po dijelovima glatkoj krivulji** Γ.



Pritom smijemo zamišljati da je Γ **prirodno satavljena** od konačno jednostavnih glatkih krivulja Γ_1, Γ_2 ... , Γ_n, Γ_{n+1}, nad $[a, t_1]$, ..., $[t_{n-1}.t_n]$, $[t_n, b]$ redom, "ljepljenjem točke $r(t_i) \in \Gamma_i$ s točkom $r(t_i) \in \Gamma_{i+1}$", $i = 1, \cdots, n$.

Definirajmo premda ne posve korektno (ali za naše potrebe ipak zadovoljavajuće) s pojmom **usmjerene** krivulje.

Promatrajmo glatku krivulju Γ zadanu parametrizacijom $par([a, b], r)$. Ona u svakoj točki $T = r(t) \in \Gamma$ dopušta tangentu, koju kao pravac ($\cong \mathbb{R}$) možemo usmjeriti, tj. pridijeliti joj koordinatni sustav $\left(O \equiv T; \overrightarrow{i}\right)$ ili $\left(O \equiv T; -\overrightarrow{i}\right)$.

Reći ćemo da je glatka krivulja Γ **usmjerena** (ili **orijentirana**) ako je na svakoj njezinoj tangenti odabran točno jedan koordinatni sustav. Slijedi da se Γ može usmjeriti na neizmjerno načina, ali su od svih njih zanimljiva samo dva, tzv. **neprekidna usmjerenja**, koja su inducirana dvama usmjerenjima danog pravca $\mathbb{R}$.

Ne pojašnjavajući to pobliže, smijemo zamišljati da glatka krivulja dopušta točno dva (neprekidna) usmjerenja:

• jedno se dobiva "gibajući se duž Γ od rubne točke $A = r(a)$ do rubne točke $B = r(b)$ uz stalni porast varijable $t \in [a, b]$",

• a drugo "gibajući se, obratno, od točke B do točke A uz stalni pad varijable $t \in [a, b]$".

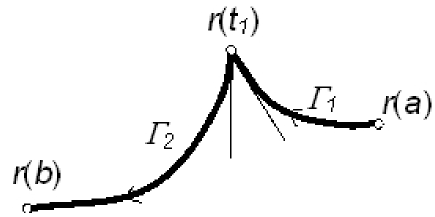
U prvomu slučaju kažemo da je:

• krivulja Γ **usmjerena** (ili **orijentirana**) **porastom parametra** t,

a u drugomu da je:

• **usmjerena** (ili **orijentirana**) **padom parametra** t.

U prvomu (drugomu) slučaju kažemo da je $A = r(a)$ **početak** (**kraj**) i da je $B = r(b)$ **kraj** (**početak**) usmjerene krivulje Γ. Pritom trebamo biti vrlo oprezni jer usmjerenje porastom parametra $t \in [a, b]$ može biti isto što i usmjerenje padom parametra $\tau \in [c, d]$ u nekoj drugoj glatkoj parametrizaciji iste krivulje.



Ako je krivulja Γ po dijelovima glatka, njezine sastavne glatke krivulje $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ dopuštaju po dva neprekidna usmjerenja.

- Reći ćemo da je Γ **usmjerena** (ili **orijentirana**) čim su $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ usmjerene **sukladno**, tj. kraj od Γ_i jest početak od Γ_{i+1}, $i = 1, \cdots, n$.

Primijetimo da se ova definicija prirodno prenosi i na jednostavno zatvorenu po dijelovima glatku krivulju.

U posebnom slučaju jednostavno zatvorene po dijelovima glatke krivulje Γ u (koordinatiziranoj) ravnini ($\mathbb{R}^2 \equiv (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$) govor se može reducirati na tzv. **negativno** i **pozitivno usmjerenje**, tj. na ono sukladno gibanju satne kazaljke i njemu suprotno gibanje.

- Opća oznaka za (neprekidno) usmjerenu krivulju Γ bit će $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$.

- Ako je na istoj krivlji Γ zadano i suprotno usmjerenje, razlikovat ćemo ga od $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ označavajući ga s $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$.

- U posebnom slučaju jednostavno zatvorene ravninske krivulje, $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ će označavati njezino negativno usmjerenje a $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ ono pozitivno.

Krivuljni integral prve vrste

Neka je

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^3,$$

funkcija (skalarno polje na D), a

$$r(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad t \in [a, b],$$

parametarska jednadžba glatke krivulje $\Gamma \subseteq D$. Tada je dobro definirana kompozicija

$$[a, b] \xrightarrow{r} D \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

$$t \mapsto (f \circ r)(t) = f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)),$$

što je realna funkcija jedne varijable na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definicija 5.2 Ako je funkcija

$$t \mapsto \left((f \circ r) \cdot |\overrightarrow{r}'| \right)(t) = f\left(r(t)\right) \cdot |\overrightarrow{r}'(t)| \,, \quad t \in [a,b],$$

integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\int_a^b f\left(r(t)\right) \cdot |\overrightarrow{r}'(t)| \, dt$$

nazivamo **integralom skalarnoga polja** f **po krivulji** Γ (ili **krivuljnim integralom prve vrste**) i označujemo s

$$\int_\Gamma f ds.$$

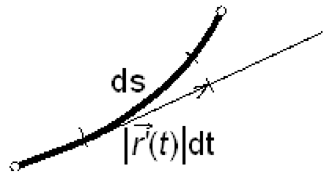
Primijetimo da oznaka $\displaystyle\int_\Gamma f ds$ ima puni smisao jer je

$$|\overrightarrow{r}'(t)| = \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2},$$

pa je

$$|\overrightarrow{r}'(t)| \, dt \equiv ds$$

"duljinski element" krivulje (luka) Γ.



Stoga je operativni zapis krivuljnog integrala prve vrste

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(\phi(t),\psi(t),\chi(t)) \cdot \sqrt{\phi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2} dt.$$

Napomena U praksi, kad krivulja Γ predstavlja model tanke žice, a f je funkcija njezine ("linearne") gustoće, krivuljni integral $\displaystyle\int_\Gamma f ds$ računa masu te žice.

Treba napomenuti da, apriori, nije jasno je li Definicija 5.2 posve korektna. Naime, uz nju bi valjalo dokazati da krivuljni integral $\int\limits_\Gamma f ds$ ne ovisi o odabranoj parametrizaciji krivulje Γ, tj. da je

$$\int_a^b f(r(t)) \cdot |\overrightarrow{r}'(t)|\, dt = \int_c^d f(p(\tau)) \cdot |\overrightarrow{p}'(\tau)|\, d\tau,$$

pri čemu su $([a,b],r)$ i $([c,d],p)$ bilo koje dvije glatke parametrizacije od Γ. Budući da bi to zahtijevalo opširnije razmatranje, ne ćemo se u to upuštati.

Primjer 1 Izračunajmo krivuljni integral prvoga tipa $\int\limits_{\Gamma} f ds$ pri čemu je

$$f(x, y, z) = x + z$$

i Γ zadana jednadžbama

$$x = t, \quad y = \frac{\sqrt{6}}{2}t^2, \quad z = t^3, \quad t \in [0, 1].$$

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt$$

$$\int_0^1 (t + t^3)\sqrt{1 + 6t^2 + 9t^4} dt = \int_0^1 (t + t^3)(1 + 3t^2) dt$$

$$= \int_0^1 (t + 4t^3 + 3t^5) dt = 2.$$

Napomenimo da se u slučaju po dijelovima glatke krivulje Γ, prirodno sastavljene od glatkih krivulja $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n+1}$, pripadni krivuljni integral prve vrste smije definirati kao zbroj, tj.

$$\int_{\Gamma} f ds \overset{\text{def.}}{=} \int_{\Gamma_1} f ds + \cdots + \int_{\Gamma_{n+1}} f ds.$$

Izravno iz Definicije 5.2 i svojstava Riemannova integrala slijedi da je krivuljni integral prve vrste linearni funkcional, tj. da vrijedi:

Teorem 5.3 Neka su $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, integrabilne funkcija, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $\Gamma \subseteq D$ po dijelovima glatka krivulja. Tada je

$$\int_\Gamma (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_\Gamma f ds + \mu \int_\Gamma g ds.$$

Napomena: Često se (po dijelovima) glatka krivulja $\Gamma \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^3$ zadaje kao presjek dviju ploha zadanih jednadžbama

$$G(x, y, z) = 0 \quad \text{i}$$

$$H(x, y, z) = 0.$$

Tada treba, pod uvjetima teorema o implicitnoj funkciji , "eliminacijom treće varijable" dobiti jednadžbe $y = g(x)$, za svaki z, i $z = h(x)$, za svaki y, pri čemu je $x \in [a, b]$, dviju novih ploha s istim presjekom Γ. Pritom su g i h neprekidno derivabilne funkcije na $[a, b]$.

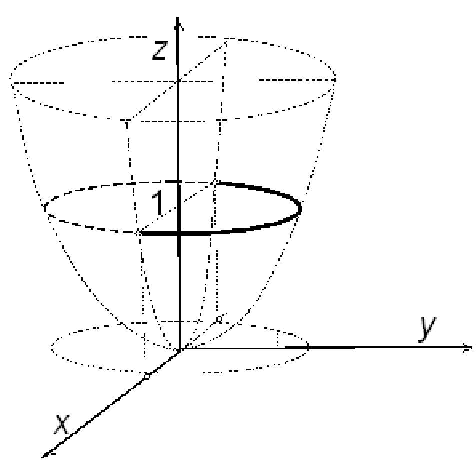
Prednost novih ploha je tomu što je njima zadana parametrizacije $x = t$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in [a, b]$, krivulje Γ, pa se pripadni krivuljni integral prve vrste može izračunati po formuli

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(x, g(x), h(x)) \cdot \sqrt{1 + g'(x)^2 + h'(x)^2} dx.$$

Pritom se u slučaju ravninske krivulje $\Gamma \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ može dobiti $h = c_0$, pa je tada

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(x, g(x)) \cdot \sqrt{1 + g'(x)^2} dx.$$

Primjer 2 Izračunajte $\int\limits_\Gamma f ds$ ako je $f(x, y, z) = x^3yz$ i Γ krivulje koja je presjek ploha $z = x^2 + y^2$, $z = 1$ ($y \geq 0$).



$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{array}\right\} \overset{z}{\Longrightarrow} x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow \Gamma' \equiv \left\{\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \Gamma \equiv \left\{\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 \end{array}\right. , t \in [0, \pi]$$

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \\ z' = 0 \end{array}\right\}, \quad ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (0)^2} dt = dt$$

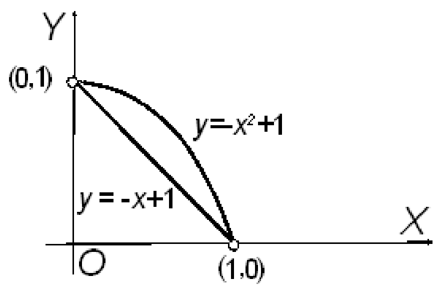
$$\int_\Gamma f ds = \int_\Gamma x^3 yz ds = \int_0^\pi (\cos^3 t)^3 \sin t dt = 0$$

Primjer 3 Izračunajmo krivuljni integral prve vrste $\int\limits_\Gamma f ds$ ako je $f(x,y)=xy$ ako je

(a) Γ ... $y=-x+1$, $x\in[0,1]$;

(b) Γ ... $y=-x^2+1$, $x\in[0,1]$.

Uočimo da u oba primjera krivulja Γ povezuje točke $A=(0,1)$ i $B=(1,0)$.



(a) $\int_\Gamma f ds = \int_0^1 x(-x+1)\sqrt{1+(-1)^2}dx = \sqrt{2}\int_0^1(-x^2+x)dx=\frac{\sqrt{2}}{6}$;

(b) $\int_\Gamma f ds = \int_0^1 x(-x^2+1)\sqrt{1+(-2x)^2}dx=\cdots=\frac{25\sqrt{5}-11}{120}$.

(Ovo pokazuje da je bitno po kojoj se krivulji integrira, tj. da krivuljni integral prve vrste ne ovisi samo o krajnjim točkama!)