

Diferencijalni i integralni račun 2

Borka Jadrijević

PREDAVANJA: srijeda, 9:15 – 12:00

KONZULTACIJE: ponedjeljak, 12:00 – 13:00
srijeda, 12:00 – 13:00

Sadržaj:

1. Funkcije više varijabla

1.1 Osnovni pojmovi;

1.2 Diferenciranje funkcija više varijabla;

1.3 Integriranje funkcija više varijabla.

2. Vektorska analiza

2.1 Vektorske funkcije;

2.2 Teorija o poljima;

2.3 Krivoljni integral;

2.4 Plošni integral.

Literatura:

Udžbenici:

- N. Uglešić, Viša matematika, II, str 235.-339., http://www.pmfst.hr/zavodi/matematika/scripta/visa_matematika.pdf;
- B. Červar, B. Jadrijević, *Matematika 2*, interna skripta, Fesb, Split 2006 ;
- I. Slapničar, M.Matić, Matematika 2, <http://www.fesb.hr/mat2>
- Petar Javor, *Matematička analiza 2*, Element, Zagreb, 2000.;
- Luka Krnić i Zvonimir Šikić, *Račun diferencijalni i integralni, I. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.;
- J. Steward, *Calculus: concepts and contexts*, ITP, Pacific Grove, 1998.;

Zbirke zadataka:

- B. P. Demidovič, Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.;
- A. Borozan, N. Duković, G. Gyramati-Pavlić, I. Hang, P. Keglević, B. Kronfeld, V. Mardešić, I. Matulić-Bendić, D. Stošić, *Riješeni zadaci iz više matematike, svezak III*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.;
- M. Antunac-Majcen, A. Borozan, V. Devidé, M. Dejanović-Strižak, N. Duković, G. Gyramati-Pavlić, B. Kronfeld, V. Mardešić, I. Matulić-Bendić, D. Stošić, *Riješeni zadaci iz više matematike, svezak IV*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

Obveze:

- predavanja ($\geq 70\%$)
- vježbe ($\geq 70\%$)

Provjere znanja:

- domaće zadaće;
- dva kolokvija (parcijalna ispita):
 - zadaci;
 - oba pozitivna.
- završni ispit:
 - pismeni - dva dijela - oba pozitivna;
 - usmeni ispit.

1. FUNKCIJE VIŠE VARIJABLA

1.1 Zadavanje skalarnih funkcija

Definicija 1.1 Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.
Funkciju

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

nazivamo realnom funkcijom od m realnih varijabla
(ili, kraće, skalarnom funkcijom).

$$T \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D \xrightarrow{f} u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}$$

(Svakoj uređenoj m -torci $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in D$ (ili točki $T \in D$) pravilom f pridružen je jedan i samo jedan realan broj $u \in \mathbb{R}$.)

Kao i funkciju jedne varijable, funkciju više varijabla (skalarnu funkciju) možemo zadati **analitički, tablično, grafički, parametarski, implicitno, ...**

Dakle:

- Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkciju

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

nazivamo funkcijom dviju varijabla.

$$(x, y) \in D \xrightarrow{f} z = f(x, y) \in \mathbb{R}$$

- $f[D] = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ – slika funkcije,
- x, y – nezavisne varijable,
- z – zavisna varijabla.

Funkciju obično zadajemo u eksplicitnom obliku

$$z = f(x, y).$$

Budući da, u tom slučaju, nije naznačena domena, podrazumijevamo da je domena maksimalan podskup D_f od \mathbb{R}^2 za koji pravilo f "ima smisla".

Skup

$$\Gamma_f = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

nazivamo graf funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$. Graf u prostoru \mathbb{R}^3 predstavlja neku plohu.

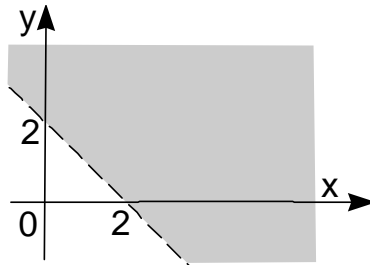
Primjer 1.1 Zapis $z = \ln(x + y - 2)$ definira funkciju

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \ln(x + y - 2),$$

pri čemu je definicijsko područje D_f određeno nejed-

nadžbom $x + y - 2 > 0$, tj.

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x + 2\}$$



- Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Funkciju

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

nazivamo funkcijom triju varijabla.

$$(x, y, z) \in D \xrightarrow{f} u = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

- $f[D] = \{u \mid u = f(x, y, z), (x, y, z) \in D\}$ – slika funkcije,
- x, y, z – nezavisne varijable,
- u – zavisna varijabla.
- $u = f(x, y, z)$ – eksplicitni oblik (domena D_f - maksimalan podskup od \mathbb{R}^3 za koji pravilo f ima smisla)

- graf funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je

$$\Gamma_f = \{ (x, y, z, f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in D \} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(ne možemo nacrtati)

Primjer 1.2 Pravilo $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ definira funkciju

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^3,$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2),$$

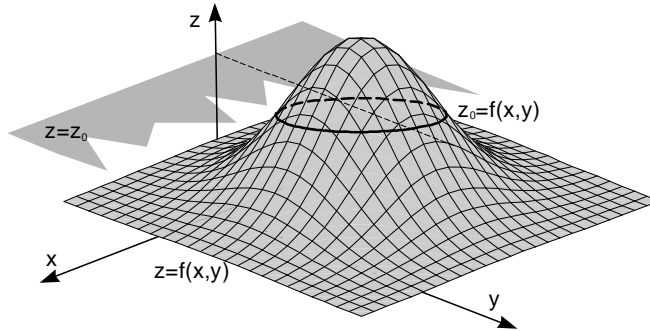
pri čemu je definicijsko područje D_f određeno nejednadžbama $-1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 2 \leq 1$. Dakle,

$$D_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \}.$$

Graf Γ_f skalarne funkcije moguće je nacrtati (djelomično) samo za $m \leq 2$.

- U slučaju $m = 2$ crtanjem ističemo samo neke njegove važne podskupove. To su, najčešće, presjeci Γ_f odabranim ravninama u prostoru \mathbb{R}^3 . Ako su te ravnine usporedne s ravninom $z = 0$ (koordinatnom xy -ravninom), dobivene presjeke nazivamo **razinskim krivuljama** funkcije f (ili grafa

Γ_f). Po tomu, svaki broj $z_0 \in f[D]$ određuje jednu razinsku krivulju jednačbom $f(x, y) = z_0$.



Dakle, na svakoj razinskoj krivulji su funkcijske vrijednosti nepromijenjive.

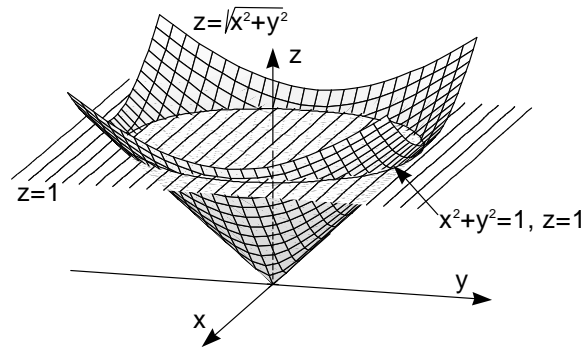
Primjer 3 Funkcijski graf Γ_f za funkciju

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

crtamo ističući njegove presjke s koordinatnim ravninama ili ravninama usporednim s njima:

- – ravninom $x = 0$ (to su zrake: $z = y, z \geq 0, x = 0$;
 $z = -y, z \geq 0, x = 0$);
- ravninom $y = 0$ (to su zrake: $z = x, z \geq 0, y = 0$;
 $z = -x, z \geq 0, y = 0$);
- ravninom $z = 1$ (to je razinska krivulja (kružnica)
 $x^2 + y^2 = 1, z = 1$).

Primijetimo da je Γ_f stožasta ploha



- Slično se u slučaju $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^3$, dakle $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^4$, govori o **razinskim ploham** (ili **nivo-ploham**) funkcije f . Pritom svaka jednačba

$$f(x, y, z) = u_0, \quad u_0 \in f[D],$$

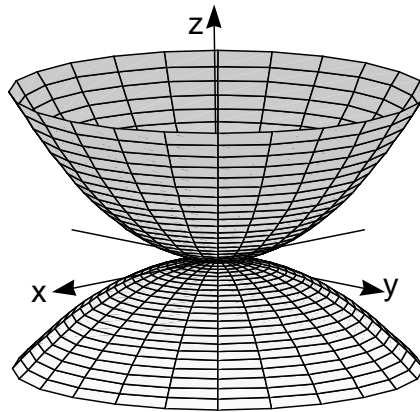
određuje tačno jednu pripadnu razinsku plohu na kojoj su sve funkcijske vrijednosti jednake u_0 .

Primjer 1.3 Razinske plohe za funkciju

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid z = 0\},$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z},$$

su paraboloidi (bez "tjemena") $z = \frac{1}{u_0} (x^2 + y^2)$, za $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Za $u_0 = 0$ dobivamo z -os ($x = 0, y = 0$) bez točke ishodišta $O \equiv (0, 0, 0)$.

Promatrajmo funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i po volji odabranu točku $T_0 \equiv (x_0, y_0) \in D$.

Neka je Π_{y_0} ravnina $y = y_0$ i označimo s $D_{y_0} = \Pi_{y_0} \cap D \subseteq D$. Očito je $D_{y_0} = \{T \equiv (x, y_0) \in D\} \neq \emptyset$ jer sadrži barem točku T_0 . Suženje

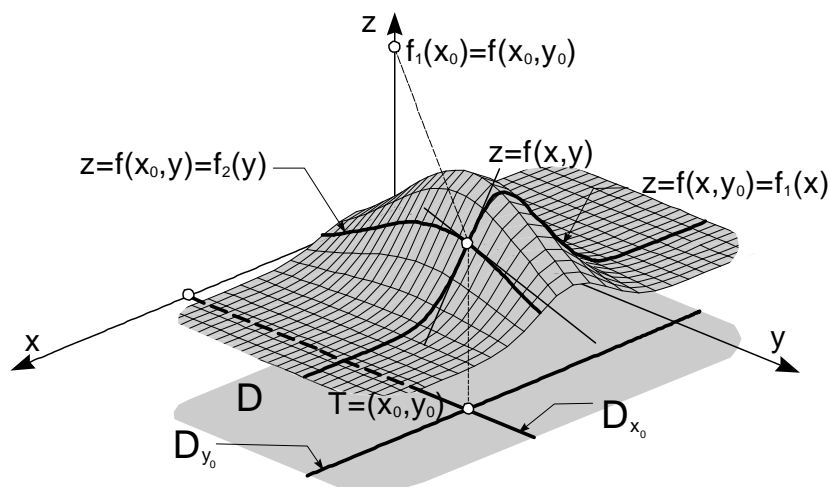
$$f|_{D_{y_0}} \equiv f_1 : D_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}$$

smijemo smatrati funkcijom jedne varijable jer se mijenja samo koordinata x .

Analogno imamo funkciju

$$f|_{D_{x_0}} \equiv f_2 : D_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$$

koju možemo smatrati funkcijom varijable y .



Slično, neka je dana funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ i neka točka $T_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in D$. Promotrimo skup

$$D_{T_0,i} = \{T \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D \mid x_j = x_j^0, i \neq j\} \subseteq D$$

Uočimo da je u $D_{T_0,i}$ promjenjiva samo jedna koordinata, pa ga možemo smatrati podskupom od \mathbb{R} (dio pravaca u \mathbb{R}^m).

Suženje

$$f \mid_{D_{T_0,i}} \equiv f_{T_0,i} : D_{T_0,i} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tada smijemo smatrati funkcijom jedne varijable.

Reći ćemo da je skalarna funkcija f **(strogo) uzlazna (silazna, monotona, po djelovima monotona) po varijabli** x_i , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, ako je za svaku točku $T \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D$, pripadno suženje

$$f_{T,i} : D_{T,i} \longrightarrow \mathbb{R}$$

uzlazna (silazna, monotona, po djelovima monotona) funkcija.

1.2. Granična vrijednost i neprekidnost

Najprije treba definirati što u \mathbb{R}^m znači "**biti blizu**", tj. što će biti "**mala okolina**" po volji odabrane točke.

Poslužit ćemo se standardnom udaljenošću $d(T, T_0)$ među točkama, tj.

- koja se za $T = (x), T_0 = (x_0)$ (slučaj $m = 1$) svodi na standardnu udaljenost u \mathbb{R}

$$d(T, T_0) = \sqrt{(x - x_0)^2} = |x - x_0|.$$

- za $T = (x, y), T_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sa

$$d(T, T_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

- za $T = (x, y, z), T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ sa

$$d(T, T_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

- općenito, za $T = (x_1, x_2, \dots, x_m), T_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ udaljenost $d(T, T_0)$ definiramo sa

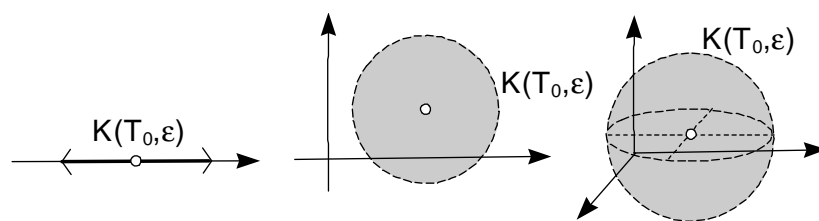
$$d(T, T_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2}.$$

Definicija 1.2

i) Za bilo koju točku $T_0 \in \mathbb{R}^m$ i bilo koji broj $\varepsilon > 0$, skup

$$K(T_0; \varepsilon) \equiv \{T \in \mathbb{R}^m \mid d(T_0, T) < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

nazivamo (otvorenom) **kuglom** polumjera ε oko točke T_0 .

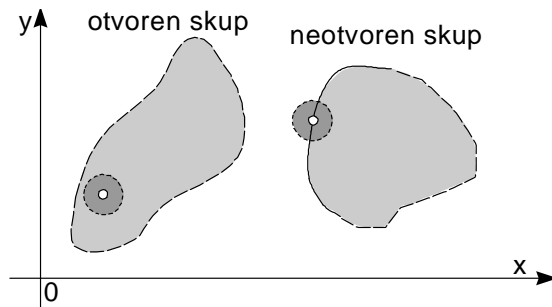


Kugle

ii) Reći ćemo da je skup $U \subseteq \mathbb{R}^m$ **okolina** točke $T_0 \in U$ ako postoji neki $\varepsilon > 0$ takav da je kugla $K(T_0; \varepsilon) \subseteq U$.

iii) Za skup $U \subseteq \mathbb{R}^m$ reći ćemo da je **otvoren** ako je on unija neke množine (otvorenih) kugala.

Napomena: Ako je skup $D \subseteq \mathbb{R}^m$ je otvoren onda je on okolina svake svoje točke. Neotvoreni skup sadrži točke kojima nije okolina .



Definicija 1.3

- i) Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^m$ i $T_0 \in \mathbb{R}^m$. Reći ćemo da je točka T_0 **gomilište** skupa D ako svaka okolina od T_0 siječe skup $D \setminus \{T_0\}$.
- ii) Za skup D kažemo da je **zatvoren** ako sadrži sva svoja gomilišta.
- iii) Za točku $T \in D$ kažemo da je **unutarnja točka** skupa D ako postoji okolina od T koja je podskup od D .
- iv) Ako za točku $T \in D$ postoji neka okolina koja ne siječe skup $D \setminus \{T\}$ onda kažemo da je T **izolirana točka** skupa D .
- v) Napokon, reći ćemo da je skup D **omeđen** ako postoji neka kugla koja ga sadrži.

Napomena:

- Svaka točka $T \in D \subseteq \mathbb{R}^m$ je ili gomilište skupa D ili izolirana točka skupa D . Svaka unutarnja točka skupa D je gomilište skupa D ;
- Skup može imati gomilišta koja nisu njegovi elementi;
- Skup ne mora biti ili zatvoren ili otvoren;
- Svaki zatvoren skup u \mathbb{R}^m je komplement nekog otvorenog ili obrnuto.

Graničnu vrijednost niza (T_n) u \mathbb{R}^m definiramo analogno onoj za realne nizove.

Definicija 1.4 Reći ćemo da je točka $T_0 \in \mathbb{R}^m$ **granična vrijednost (ili limes)** niza $\{T_n\}$ u \mathbb{R}^m ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall n \in \mathbb{N})$$

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(T_n, T_0) < \varepsilon.$$

(Primijetimo da se nejednakost $d(T_n, T_0) < \varepsilon$ ekvivalentna uvjetu $T_n \in K(T_0; \varepsilon)$!).

U tom slučaju kažemo da niz $\{T_n\}$ konvergira prema točki T_0 i pišemo $\{T_n\} \rightarrow T_0$. Budući da svaki niz može imati najviše jednu graničnu vrijednost (dokaz sličan onomu za realne nizove), smijemo pisati

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_0.$$

Nizovna konvergencija u \mathbb{R}^m svodi se na konvergenciju realnih nizova. Naime, vrijedi:

Teorem 1.5 Niz $\{T_n\}$ u \mathbb{R}^m , $T_n \equiv (x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n)$, konvergira prema $T_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ onda i samo onda, ako svaki koordinatni niz $\{x_i^n\}$ u \mathbb{R} konvergira prema $x_i^0 \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Primjer 1.4 Nađite graničnu vrijednost niza $\{T_n\}$ u \mathbb{R}^3 , $T_n \equiv \left(\frac{1-n}{n+1}, \frac{1}{n^2+1}, \frac{n}{n+1}\right)$.

Budući je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n+1} = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

po prethodnom teoremu je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-n}{n+1}, \frac{1}{n^2+1}, \frac{n}{n+1} \right) = (-1, 0, 1).$$

I graničnu vrijednost skalarne funkcije definiramo analogno onoj za realne funkcije (jedne) realne varijable.

Intuitivno:

Neka su dani funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, i točka T_0 koja je gomilište od D . Kažemo da je $L_0 \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u T_0 , i pišemo

$$\lim_{T \rightarrow T_0} f(T) = L_0,$$

ako vrijednosti $f(T)$ teže prema L_0 kad T teži prema T_0 .

Matematička definicija:

Definicija 1.6 Neka su dani funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, i točka T_0 koja je gomilište od D . Reći ćemo da je broj $L_0 \in \mathbb{R}$ **granična vrijednost funkcije f u točki T_0** ako je

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T \in D \setminus \{T_0\})$$

$$d(T, T_0) < \delta \Rightarrow |f(T) - L_0| < \varepsilon.$$

(Primijetimo da se uvjet provjerava u točkama $T \in K(T_0; \delta)$, $T \neq T_0$!)

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{T \rightarrow T_0} f(T) = L_0 \quad \text{ili} \quad \lim_{T_0} f(T) = L_0.$$

Analogno se poopćuje i granična vrijednost kad $T \rightarrow \infty$.

Primjer 1.5 Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

ima u točki $(0, 0)$ graničnu vrijednost 0, $\lim_{(0,0)} f(x, y) = 0$.

Zaista, budući da je $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$, to je

$$\begin{aligned} \lim_{(0,0)} |f(x, y)| &= \lim_{(0,0)} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \\ &\leq \lim_{(0,0)} \left| \frac{x^2 y}{2xy} \right| = \lim_{(0,0)} \left| \frac{x}{2} \right| = 0, \end{aligned}$$

pa je i $\lim_{(0,0)} f(x, y) = 0$.

Teorem 1.7 Broj $L_0 \in \mathbb{R}$ je granična vrijednost funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, u točki T_0 , $\lim_{T \rightarrow T_0} f(T) = L_0$, onda i samo onda ako, za svaki niz $\{T_n\}$ u D koji konvergira prema T_0 u \mathbb{R}^m , $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_0$, pripadni funkcijski niz vrijednosti $\{f(T_n)\}$ konvergira prema L_0 u \mathbb{R} , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(T_n) = L_0$.

Teorem vrijedi i za $T \rightarrow \infty$.

Napomena: Teorem 1.7 kaže da se traženje graničnih vrijednosti skalarnih funkcija može svesti na traženje graničnih vrijednosti realnih nizova.

Primjer 1.6 Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

nema granične vrijednosti u točki $T_0 \equiv (0, 0)$.

Zaista, promatramo li nizove

$$\{T_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\} \quad i \quad \{S_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \right\}$$

u $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Očito je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = (0, 0) \quad i \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, 0 \right) = (0, 0)$$

tj. oba niza konvergiraju prema točki $T_0 \equiv (0, 0)$. S druge strane, pripadni nizovi funkcijskih vrijednosti

$$\{f(T_n)\} = \left\{ \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \right\} \rightarrow 0, \quad \{f(S_n)\} = \left\{ \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 0^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2} \right\} \rightarrow 1,$$

konvergiraju redom prema (različitim) brojevima 0 i 1, redom.

Napomena Kod funkcija jedne varijable smo imali:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ i } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ i}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ i } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

Ovdje (za $m \geq 2$) je situacija složenija. Puteva kako "doći" u T_0 ima beskonačno. No, jasno je da limes ne smije ovisiti o putu.

Napomena 1.1 Ukoliko je

$$\lim_{\substack{T \rightarrow T_0 \\ c_1}} f(T) = L_1 \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{T \rightarrow T_0 \\ c_2}} f(T) = L_2,$$

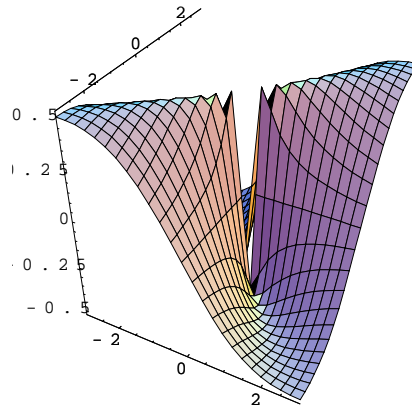
te $L_1 \neq L_2$ tada $\lim_{T \rightarrow T_0} f(T)$ ne postoji. Ovo je postupak kako utvrditi da limes ne postoji (to je puno lakše nego utvrditi da postoji).

Primjer 1.7 Ispitajte graničnu vrijednost funkcije

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

u točki $(0, 0)$.

Ukoliko $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ide po putevima koje određuju pravci $y = kx$ imamo



$$1. z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{\substack{(0,0) \\ y=kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

i traženi limes ne postoji jer za različite k dobijamo različite vrijednosti.

Primjer 1.8 Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2},$$

ima u točki $(0, 0)$ graničnu vrijednost 1, $\lim_{(0,0)} f(x, y) = 1.$

Ukoliko $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ide po putevima koje određuju pravci $y = kx$ imamo

$$\lim_{\substack{(0,0) \\ y=kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + k^2 x^2)}{x^2 + k^2 x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[x^2(1 + k^2)]}{x^2(1 + k^2)} = 1,$$

što ne znači da limes postoji i da je jednak 1.

Zadatak se može riješiti prijelazom na polarne koordinate. Budući je $x = \rho \cos \varphi$ i $y = \rho \sin \varphi$, tada $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ako i samo ako $\rho \rightarrow 0$. Imamo

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} = 1.$$

Budući da dobiveni rezultat ne ovisi o φ , tj. o kutu pod kojim "dolazimo" u točku $(0, 0)$, dakle ne ovisi o krivulji po kojoj dolazimo u točku $(0, 0)$, zaključujemo da limes postoji i da je jednak 1.

Definicija 1.8

- Reći ćemo da je funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ **neprekidna u točki** $T_0 \in D$ ako je

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T \in D)$$

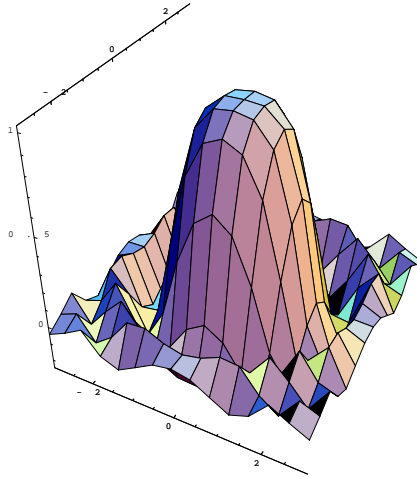
$$d(T, T_0) < \delta \Rightarrow |f(T) - f(T_0)| < \varepsilon.$$

- Ako je f neprekidna u svakoj točki $T \in A \subseteq D$ kažemo da je f **neprekidna funkcija na skupu** $A \subseteq D$;
- Ako je f neprekidna na skupu $A = D$ kažemo da je f **neprekidna funkcija**;
- U protivnim slučajevima govorimo o **prekidnoj** funkciji (u točki, na skupu).

Izravna posljedica:

Teorem 1.9 Funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ neprekidna u točki $T_0 \in D$ onda i samo onda ako je

$$\lim_{T \rightarrow T_0} f(T) = f(T_0)$$



$$z = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

Primjer 1.9 Funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

je neprekidna. Jer je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 = f(0, 0).$$

Neka važna svojstva neprekidnih funkcija - analogija s funkcijama jedne varijable (bez dokaza):

Neka je dana funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$.

- Ako je f neprekidna u točki T_0 i $f(T_0) < 0$ ($f(T_0) > 0$) onda postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $f(T) < 0$ ($f(T) > 0$) za svaki $T \in D \cap K(T_0; \varepsilon)$.
- Neka je $A \subseteq D$ zatvoren i omeđen. Ako je funkcija f neprekidna na A onda postoje brojevi $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$m \leq f(T) \leq M$$

za svaki $T \in A$, tj. $f|_A$ je omeđena funkcija. Štoviše, $f|_A$ poprima svoju najmanju (minimum) i svoju najveću (maksimum) vrijednost, tj. postoje $T_1, T_2 \in A$ takvi da je

$$f(T_1) \leq f(T) \leq f(T_2)$$

za svaki $T \in A$.

- Zbroj $f + g$, razlika $f - g$, umnožak $f \cdot g$ i količnik $\frac{f}{g}$ (kad god su definirani) neprekidnih skalarnih funkcija jesu neprekidne skalarne funkcije.