5. Aritmetičke funkcije

Prisjetimo se: Funkciju $\vartheta : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ za koju vrijedi:

i) $\vartheta(1) = 1;$

ii) $\vartheta(mn) = \vartheta(m)\vartheta(n)$ za sve m, n takve da je $(m, n) = 1,$

nazivamo *multiplikativna funkcija*.

Primjer: Eulerova funkcija.(Teorem 2.8)

Uočimo: Ako je f multiplikativna funkcija, onda je i funkcija defirirana sa

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

također multiplikativna funkcija. Neka je $(m, n) = 1.$ Tada je

$$g(mn) = \sum_{d|m} \sum_{d'|n} f(dd') \overset{f-mult.}{=} \sum_{d|m} \sum_{d'|n} f(d) f(d') =$$

$$\sum_{d|m} f(d) \sum_{d'|n} f(d') = g(m) \cdot g(n)$$

Definicija 5.1 *Möbiusova funkcija* $\mu(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je definirana sa

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{ako } n \text{ nije kvadratno slobodan;} \\ (-1)^k, & \text{ako je } n = p_1 p_2 \cdots p_k, \\ & \text{gdje su } p_i \text{ svi različiti prosti brojevi.} \end{cases}$$

Uočimo: μ multiplikativna funkcija, pa je i funkcija definirana sa

$$\nu(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$$

također multiplikativna funkcija. Dakle,

- $\nu(1) = 1;$
- Za $n > 0$ imamo

$$\begin{gathered} \nu(n) = \nu(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \nu(p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot \nu(p_k^{\alpha_k}) = \\ (\mu(1) + \mu(p_1)) \cdot \ldots \cdot (\mu(1) + \mu(p_k)) = \\ = (1-1) \cdot \ldots \cdot (1-1) = 0. \end{gathered}$$

Primjer 5.1 Dokažimo da je

$$\sum_{n \le x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1 \quad \text{i} \quad \left| \sum_{n \le x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right| \le 1.$$

Teorem 5.1 (Möbiusova formula inverzije) Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ proizvoljna funkcija, te neka je

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d), \ n \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

Obrnuto, ako je $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$, onda je $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Dokaz:

Uočimo: Ako prethodni teorem primijenimo na

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n \ \text{(Teorem 2.9)}$$

dobivamo

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Definicija 5.2 Neka je $n \in \mathbb{N}$. Označimo:

- $\tau(n) -$ broj pozitivnih djelitelja broja n;
- $\sigma(n) -$ sumu svih pozitivnih djelitelja broja n.

Vrijedi:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 \quad \text{i} \quad \sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

pa su obje funkcije multiplikativne. Kako je

$$\tau\left(p^j\right) = j+1 \quad \text{i} \quad \sigma\left(p^j\right) = 1+p+p^2+...+p^j = \frac{p^{j+1}-1}{p-1}$$

dobivamo

$$\tau(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1) \quad \text{i}$$

$$\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}.$$

Primjer 5.2 Za prirodan broj n kažemo da je *savršen* ako je $\sigma(n) = 2n$, tj. ako je n jednak sumi svojih pravih djelitelja. Npr. 6 i 28 su savršeni brojevi. Nije poznato je li postoji iti jedan neparan savršen broj.

Dokažimo: paran broj n je savršen ako i samo ako ima oblik $2^{p-1}(2^p-1)$, gdje su p i 2^p-1 prosti brojevi.

Zadatak 5.1 Izračunajte

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d}.$$

Propozicija 5.1

i) $\sigma(n) < n(1 + \ln n)$ za sve $n \geq 2$;

ii) $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$ za sve $n \geq 2$.

Dokaz:

Ispitivanje asimptotskog ponašanja aritmetičkih funkcija

Želimo ocjeniti sume oblika

$$\sum_{n \leq x} f(n),$$

gdje je x dovoljno velik realan broj.

Oznake za usporedbu rasta dviju funkcija kad argument teži u beskonačno.

Neka je su $f(x)$ i $h(x)$ bilo koje funkcije i $g(x)$ pozitivna funkcija, gdje je $x \in \mathbb{N}$ ili $x \in \mathbb{R}$. Pišemo

$$f(x) \ll g(x) \quad \text{(ili} \quad f(x) = O(g(x))\text{)}$$

ako postoje konstante B i C takve da je

$$|f(x)| \leq Cg(x)$$

za sve $x \geq B$. Ako je

$$f(x) - h(x) \ll g(x),$$

pišemo

$$f(x) = h(x) + O(g(x)).$$

Nadalje, pišemo

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{i} \quad f(x) \sim g(x)$$

ako je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ \text{ i } \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \quad \text{redom.}$$

Primjer 1: Imamo

$$|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \ \sin x \ll 1, \ \text{tj.} \ \sin x = O(1)$$

i $x + \sin x = x + O(1)$ ($|x + \sin x - x| = |\sin x| \leq 1$).

i

$$|x| \leq x + \frac{1}{x} \quad \text{i} \quad \left| x + \frac{1}{x} \right| \leq 2x \ \text{za} \ x \geq 1 \Rightarrow$$

$$x + \frac{1}{x} \ll x \ll x + \frac{1}{x}, \ \text{tj.}$$

$$x + \frac{1}{x} = O(x) \quad \text{i} \quad x = O\left(x + \frac{1}{x} \right)$$

Nadalje, kako je

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x^2} = 0 \ \Rightarrow x + \frac{1}{x} = o\left(x^2\right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1 \ \Rightarrow \ x + \sin x \sim x$$

Primjer 2: Budući je

$$\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$$

i $\{x\}$ je omeđena ($0 \leq \{x\} < 1$), možemo pisati

$$\lfloor x \rfloor = x + O(1).$$

Slično, za $x > 1$, zbog

$$\int_1^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} < 1 + \int_1^x \frac{1}{t} dt,$$

tj. zbog

$$0 \leq \ln \lfloor x \rfloor \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} < 1 + \ln x,$$

možemo pisati

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + O(1),$$

Propozicija 5.2

i) $\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + O(x)$;

ii) $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{1}{12}\pi^2 x^2 + O(x \ln x)$

iii) $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln x)$

Dokaz:

Budući je

$$\sum_{n\leq x}\varphi\left(n\right)=\frac{3}{\pi^{2}}x^{2}+O\left(x\ln x\right),$$

$$\sum_{n\leq x}n\leq\frac{x\left(x+1\right)}{2}$$

i

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{\pi^{2}}x^{2}+Cx\ln x}{\frac{3}{\pi^{2}}x^{2}}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x(x+1)}{2}}{\frac{1}{2}x^{2}}=1,$$

može se pokazati da je

$$\sum_{n\leq x}\varphi\left(n\right)\sim\frac{3}{\pi^{2}}x^{2}\quad\text{i}\quad\sum_{n\leq x}n\sim\frac{1}{2}x^{2}.$$

Ovo možemo interpretirati i tako da kažemo da je vjerojatnost da su dva nasumice odabrana cijela broja relativno prosta jednaka

$$\frac{\sum\limits_{n\leq x}\varphi\left(n\right)}{\sum\limits_{n\leq x}n}\simeq\frac{\frac{3}{\pi^{2}}x^{2}}{\frac{1}{2}x^{2}}=\frac{6}{\pi^{2}}\approx0.607\,93.$$

Za ocjenu sume $\sum_{n\leq x} F(n)$ korisno je F prikazati u obliku $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, koristeći npr. Möbiusovu formulu inverzije. Imamo

$$\sum_{n\leq x} F(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} f(d) = \sum_{\substack{d,m \\ dm\leq x}} f(d) =$$

$$= \sum_{d\leq x} f(d)\left\lfloor \frac{x}{d}\right\rfloor = x\sum_{d\leq x}\frac{f(d)}{d} + O\left(\sum_{d\leq x}|f(d)|\right)$$

Primjer 5.3 Dokažimo da vrijedi

$$\sum_{n\leq x}\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2}x + O(\ln x),$$

$$\sum_{n\leq x}\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}x + O(\ln x).$$

Distribucija prostih brojeva.

Neka je $\pi(x)$ broj prostih brojeva p, $p \leq x$.
Godine 1896. Hadamar i de la Vallée Poussin su dokazali da je

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Može se dokazati nešto slabija tvrdnja, tj. da postoje realni brojevi a, b takvi da je

$$a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\frac{x}{\ln x},$$

za dovoljno velike x (dokaz u skripti str. 55.-59.).

Riemanova zeta funkcija je definirana sa

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

gdje je $s \in \mathbb{C}$ i $\operatorname{Re} s > 1$ (da bi red konvergirao).
Osnovna veza između Riemanove zeta funkcije i prostih brojeva je dana tzv. *Eulerovom produktnom formulom*

$$\zeta(s) = \prod_{p-prost} \left(1 - \frac{1}{p^{-s}}\right)^{-1}.$$