## 2.5 Analitičko predočenje ploha. Plohe 2. reda

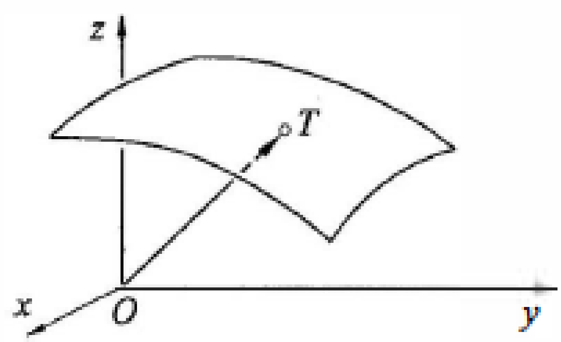
Detaljnije o pojmu plohe biti će govora u drugim matematičkim kolegijima. Ovdje ćemo se osloniti uglavnom na intuitivnu predodžbu.

Neka je

$$\vec{r} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\vec{r}(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \tag{1}$$

**vektorska funkcija**, neprekidna u dvije (realne) varijable $u, v$. Ako za svake $(u,v) \in D$ interpretiramo (1) kao radijvektor neke točke, uz varijabilne parametare $u$ i $v$, dobit ćemo u prostoru jednu dvoparametarsku familiju točaka koju nazivamo **ploha.**




U tom slučaju kažemo da je (1) vektorska jednadžba te plohe. Ako (1) pišemo koordinatno dobivamo

$$x = f(u,v), \quad y = g(u,v), \quad z = h(u,v) \tag{2}$$

**parametarsku jednadžbu** plohe.

Ako iz jednadžbi u (2) eliminiramo parametre $u$ i $v$, dobivamo

$$z = \varphi(x, y) \tag{3}$$

kao **eksplicitni oblik**, odnosno

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

kao **implicitni oblik** jednadžbe plohe.

**Primjeri:**

**1. Ravnina:** Svaka se ravnina može analitički predočiti kao

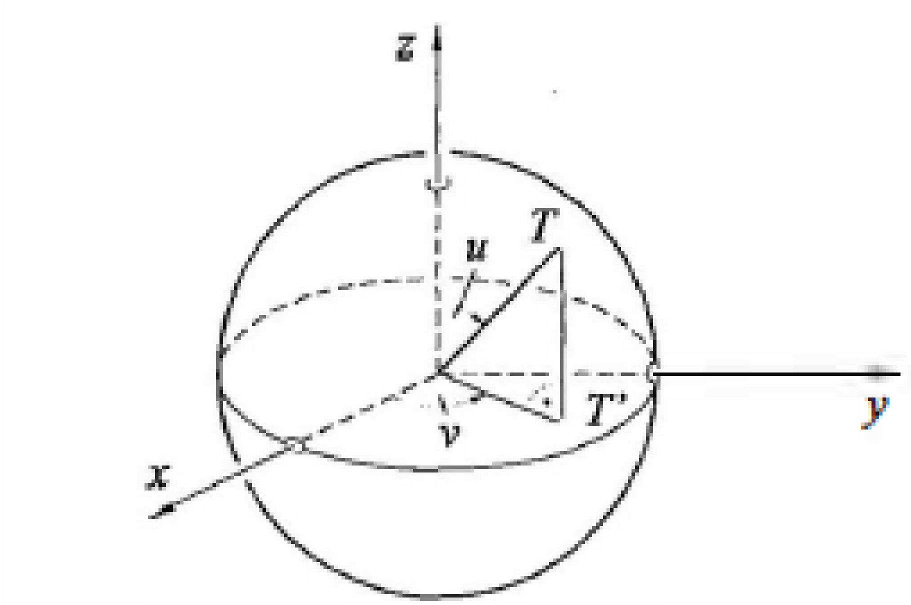
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tj. linearnom jednadžbom tipa (4) ili parametarski kao

$$\begin{aligned} x &= u\alpha_1 + v\beta_1 + x_1 \\ y &= u\alpha_2 + v\beta_2 + y_1 \\ z &= u\alpha_3 + v\beta_3 + z_1. \end{aligned}$$

tj. jednadžbama tipa (2).

**2. Sfera:** Kako je $\overline{OT'} = R\sin u$, gdje je $R$ polumjer sfere (slika)




imamo

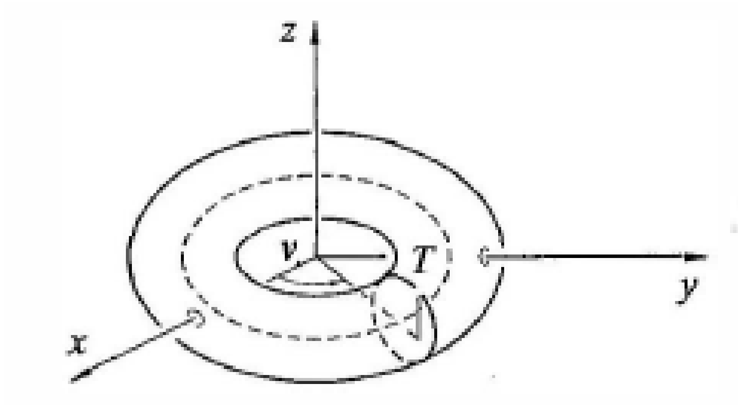
$$\begin{aligned} x &= R\sin u\cos v \\ y &= R\sin u\sin v \\ z &= R\cos u \end{aligned}$$

što su jednadžbame tipa (2). Eliminacijom parametara $u$ i $v$ dobivamo implicitnu jednadžbu sfere

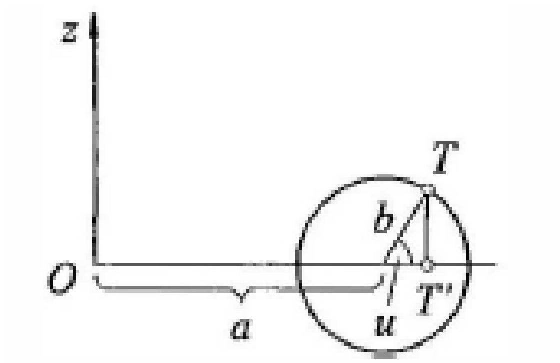
$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

(jednadžba tipa (4)).

**3. Torus:** Nekaje s $a$ označen "polumjer" torusa, s $b$ polumjer normalnog presjeka torusa (slike)




ili u ravnini određenoj s osi $z$ i točkom $T$




Kako je $\overline{OT'} = a + b\cos u$, imamo

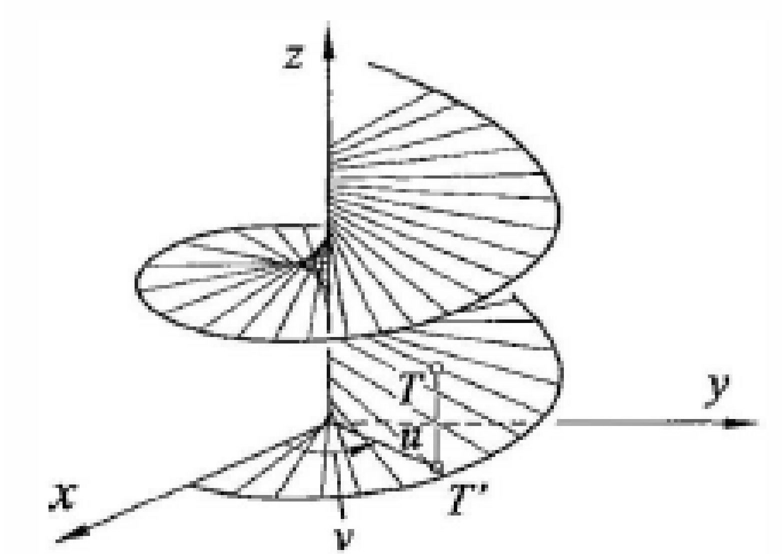
$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos u)\cos v \\ y &= (a + b\cos u)\sin v \\ z &= b\sin u \end{aligned}$$

što su jednadžbame tipa (2). Eliminacijom parametara $u$ i $v$ dobivamo implicitnu jednadžbu torusa

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2\right)^2 - 4a^2\left(b^2 - z^2\right) = 0$$

(jednadžba tipa (4)).

**4. Helikoid** (**Zavojnica**). Ta je ploha izgrađena od pravaca. Nastaje jednolikom rotacijom pravca i istodobnom translacijom u danom smjeru.




Iz slike imamo

$$\begin{aligned} x &= u\cos v \\ y &= u\sin v \\ z &= cv \end{aligned}$$

što su jednadžbame tipa (2). Eliminacijom parametara $u$ i $v$ dobivamo implicitnu jednadžbu helikoida

$$y - x\,tg\frac{z}{c} = 0$$

(jednadžba tipa (4)).

- Kažemo da je ploha **algebarska**, odnosno **transcendentna**, ovisno o tome je li njezina implicitna jednadžba algebarska ili transcendentna jednadžba.

  Primjer: ravnina, sfera i torus su algebarske plohe, a helikoid je transcendentna ploha.

- Za algebarsku plohu kažemo da je **reda** $n$ ako je analitički predočena polinomom $n-$tog stupnja u nepoznanicama $x$, $y$ i $z$.

  Primjer: ravnina je ploha prvog reda, sfera drugog reda, a torus četvrtog reda.

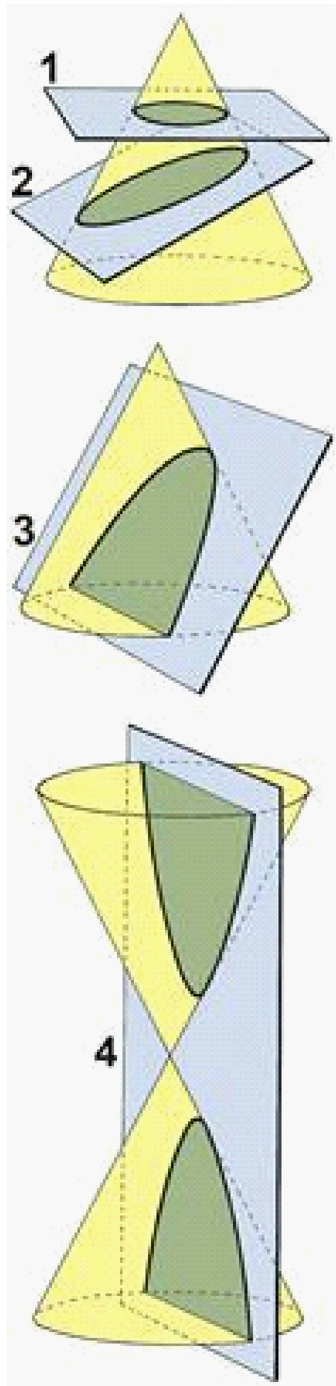
Od posebnog su interesa **plohe 2. reda** ili **kvadrike**, tj. plohe dane s

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz+Ezx+Fxy+Gx+Hy+Iz+K=0,$$

gdje su koeficijenti $A, ..., K \in \mathbb{R}$ i vrijedi da je bar jedan od koeficijenata $A, ..., F$ različit od nule.

Gornja se jednadžba znatno pojednostavnjuje ako izaberemo pogodni sustav, tj. takav koji za svoje elemente (osi i ravnine) rabi elemente simetrije plohe (pomak $O \to (h, k, l)$).
Navest ćemo analitička predočenja osnovnih tipova (realnih i nedegeneriranih) ploha 2. reda u njihovu najjednostavnijem, **kanonskom obliku**.

Kako bismo mogli lakše skicirati plohe 2. reda prisjetimo se konika, tj. krivulja drugog reda u ravnini: kružnica (1), elipsa (2), parabola (3), hiperbola (4):

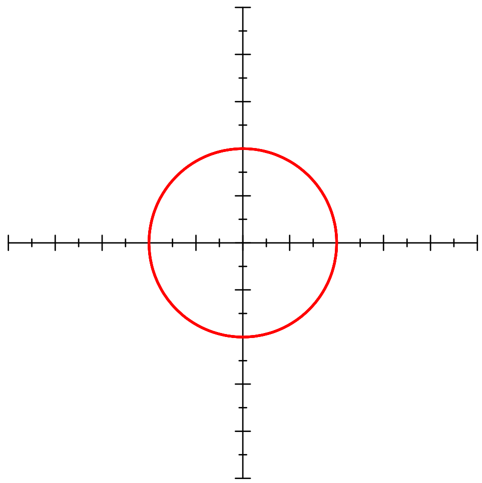



Krivulje drugog reda dobiju se presjekom ravnine i konusa.

Kanonski oblici konika:

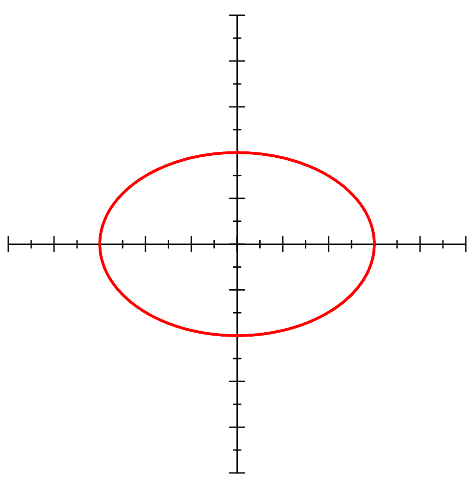
- *Kružnica*

$$x^2 + y^2 = r^2$$



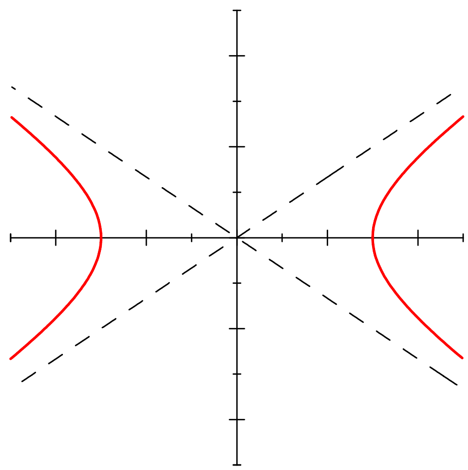
- *Elipsa*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



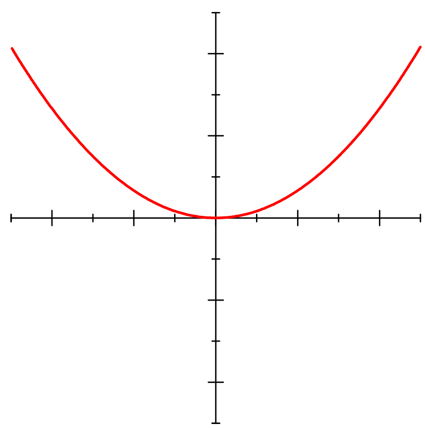
- *Hiperbola*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



- *Parabola*

$$x^2 = 2py$$



Općenito konike su dane općom jednadžbom

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

gdje barem jedan od koeficijenata $A, B, C$ različit od nule.

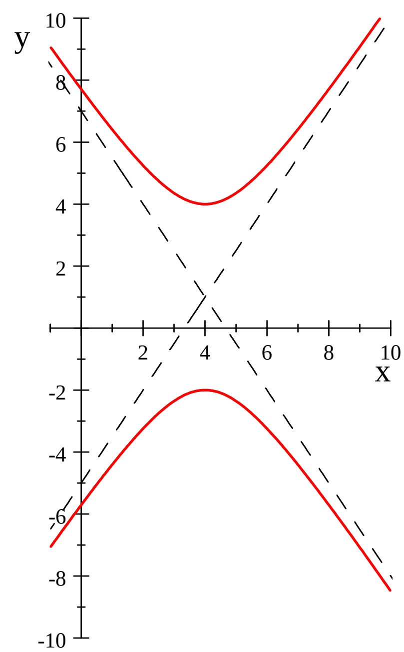
**Primjer:** Skicirajte u ravnini

$$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0.$$

Pokaže se

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$$

pa je to hiperbola



Osnovnih tipova ploha 2. reda u kanonskom obliku:

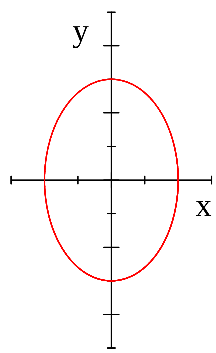
## 1. Elipsoiloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Presjeci s ravninama:

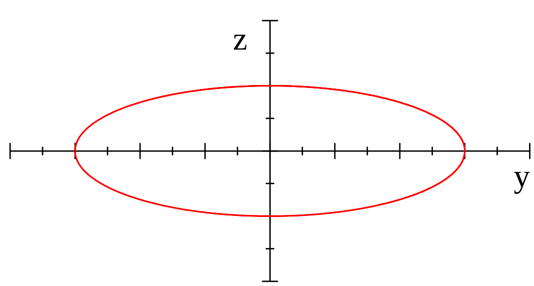
- $z = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \text{elipsa}$$



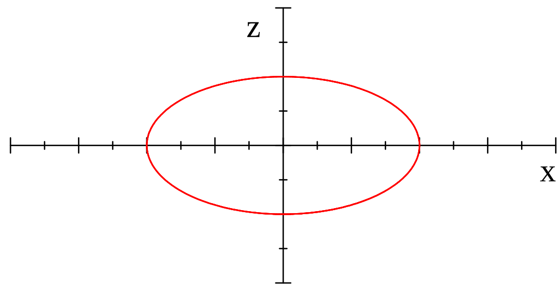

- $x = 0$

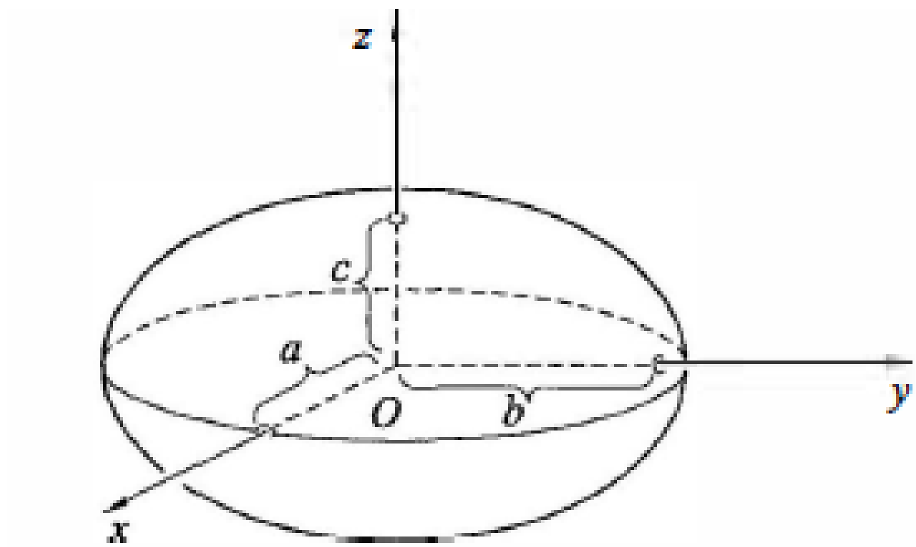
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Longrightarrow \text{elipsa}$$



- $y = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Longrightarrow \text{elipsa}$$




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \;\; Elipsoid$$

Uz $a \neq b \neq c$ govorimo o troosnom elipsoidu. Ako je npr. $a = b$, imamo rotacijski elipsoid. Uz $a = b = c = R$ dobivamo sferu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

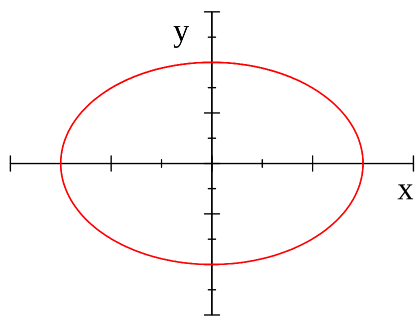
## 2. Jednoplošni hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Presjeci s ravninama:

- $z = k$

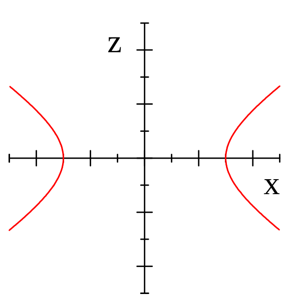
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \quad \text{- elipse}$$



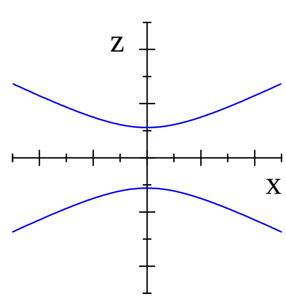

- $y = k$

$$k \neq \pm b \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}, \text{ - hiperbola}$$

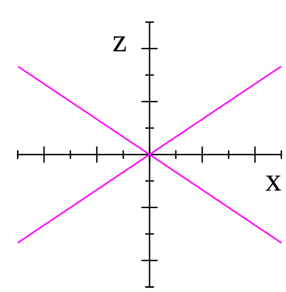
$$k = \pm b \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Longrightarrow z = \pm\frac{c}{a}x \quad \text{- pravci}$$




$|k| < b$




$|k| > b$

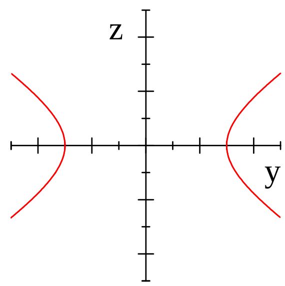



$k = \pm b$

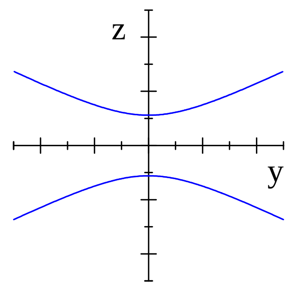
- $x = k$

$$k \neq \pm a \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2},$$ - hiperbola

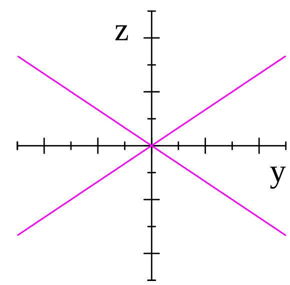
$$k = \pm a \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Longrightarrow z = \pm\frac{c}{b}y$$ - pravci



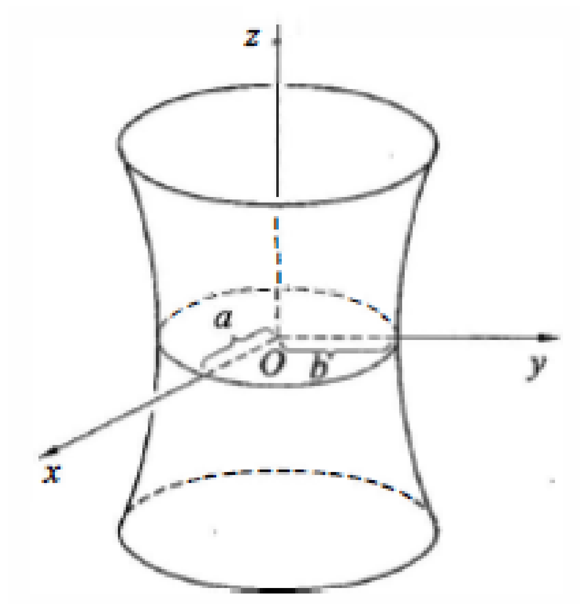

$|k| < a$




$|k| > a$

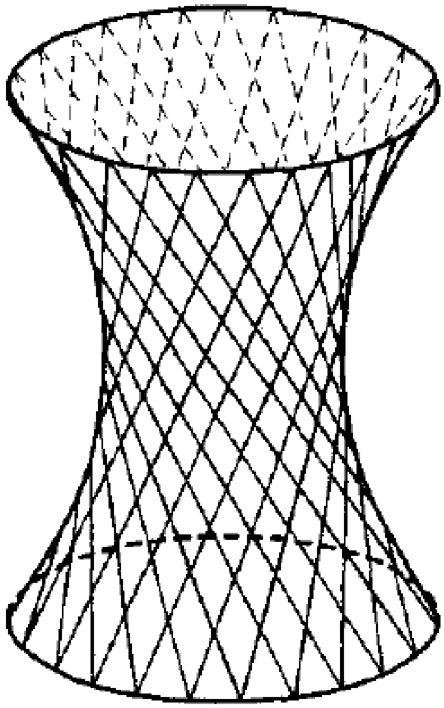



$k = \pm a$

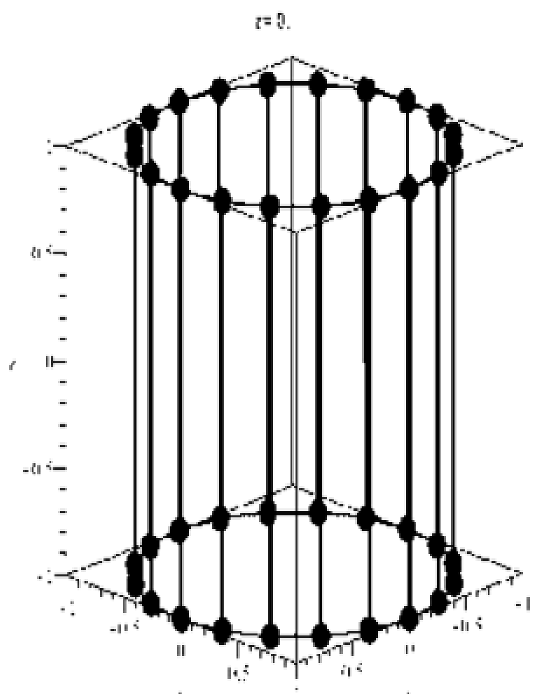


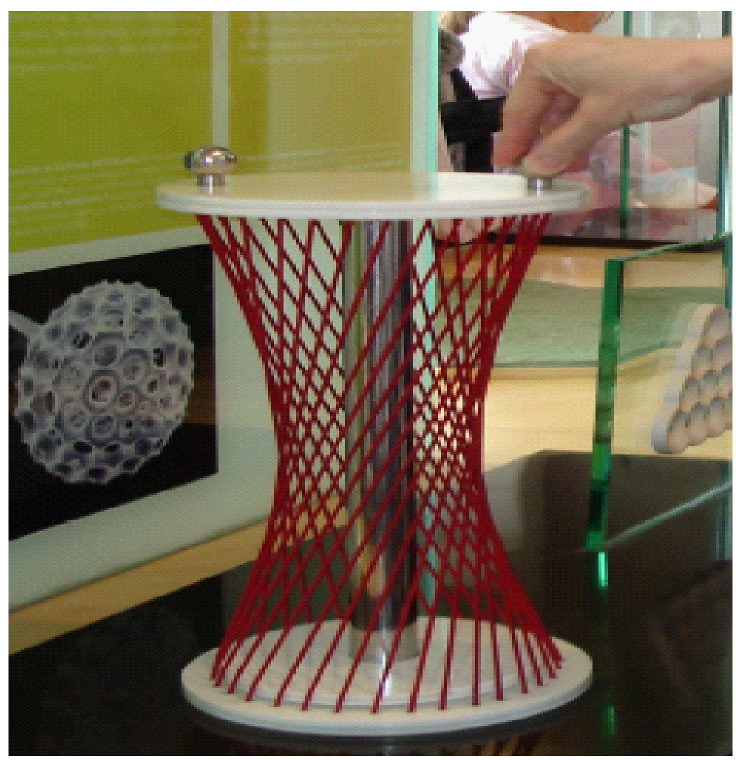

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

*Jednoplošni hiperboloid*



*Sl. 11.5. Jednoplošni hiperboloid je pravčasta ploha. Time izričemo jednu neobičnu tvrdnju: čitava se ploha može dobiti kao unija pravaca! Možda najzorniji dokaz tome (uz žičane modele plo e koje je sve teže pronaći) je način izgradnje dimnjaka nuklearnih centrala koje većinom imaju oblik jednoplošnog hiperboloida, a okosnicu im čine ravni betonski blokovi. Gradnjom na taj način postiže se veća stabilnost konstrukcije nego, recimo, ako je ona cilindričnog oblika.*





## 3. Dvoplošni eliptički hiperboloid

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Presjeci s ravninama:

- $z = k$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$$

$k = \pm c \implies \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \implies T(0, 0, \pm c)$ - točka

$|k| > c \implies$ elipsa

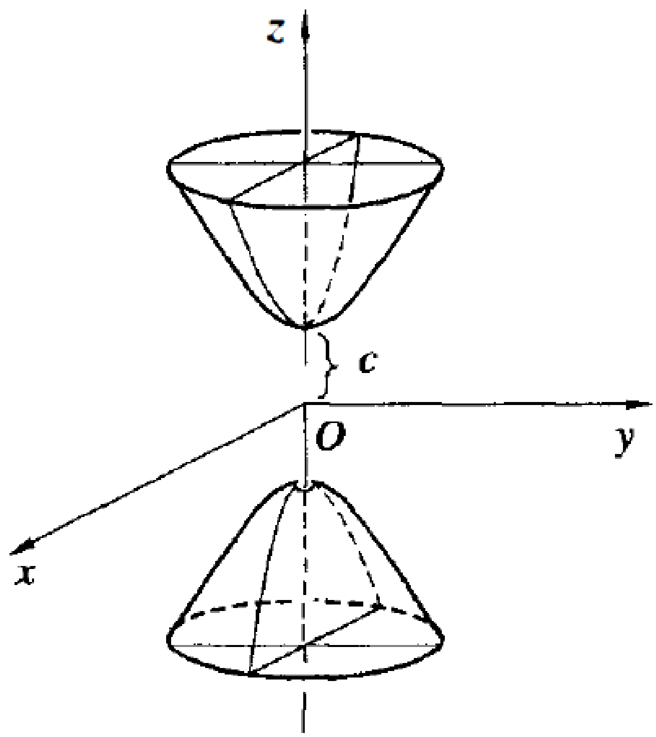
$$|k| < c \implies \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{k^2}{c^2} - 1}_{<0} \implies \text{nema presjeka}$$

- $y = k$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2} \implies \text{hiperbola}$$

- $x = k$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2} \implies \text{hiperbola}$$




$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ *Dvoplošni eliptički hiperboloid*

## 4. Eliptički paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \quad p > 0.$$

Presjeci s ravninama:

- $z = k$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pk$$

$$k = 0 \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \implies T(0,0,0)$$ - točka

$$k > 0 \implies$$ elipsa

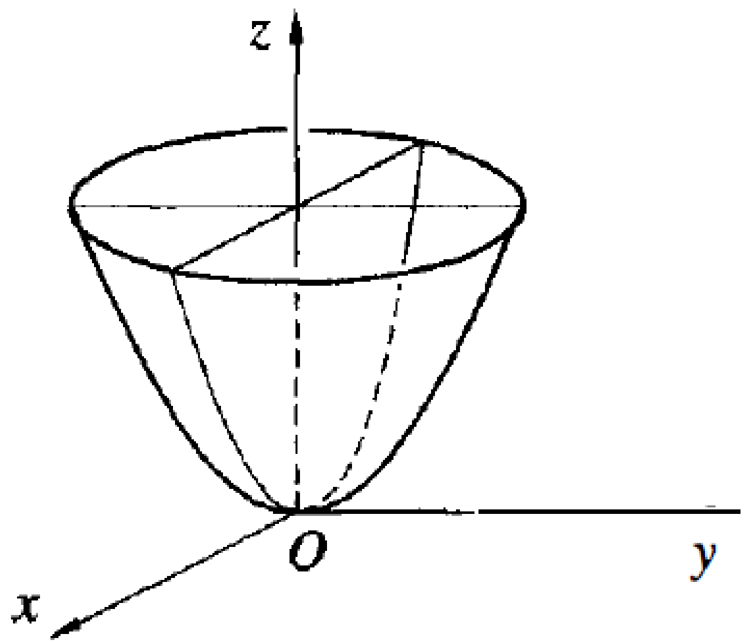
$$k < 0 \implies \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}_{\geq 0} = \underbrace{2pk}_{<0} \implies$$ nema presjeka

- $y = k$

$$y = k \implies \frac{x^2}{a^2} = 2pz - \frac{k^2}{b^2}$$ - parabola

- $x = k$

$$x = k \implies \frac{y^2}{b^2} = 2pz - \frac{k^2}{a^2}$$ - parabola




$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz,\ p > 0$ *Eliptički paraboloid*

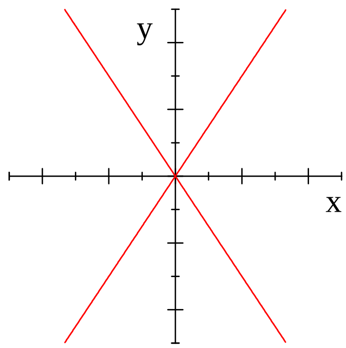
## 5. Hiperbolički paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \quad p > 0.$$

Presjeci s ravninama:

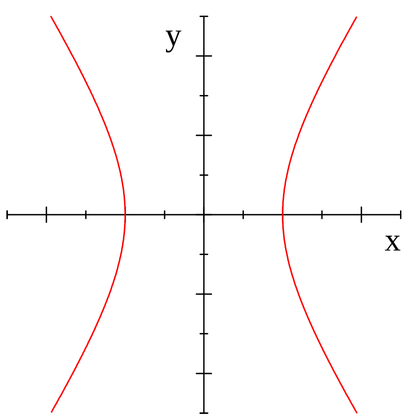
- $z = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Longrightarrow y = \pm\frac{b}{a}x$$ - pravci

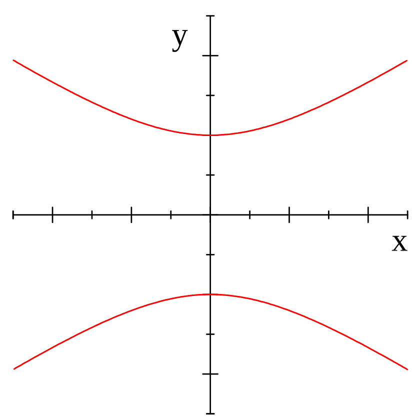



- $z = k, \quad k \neq 0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pk$$ - hiperbola



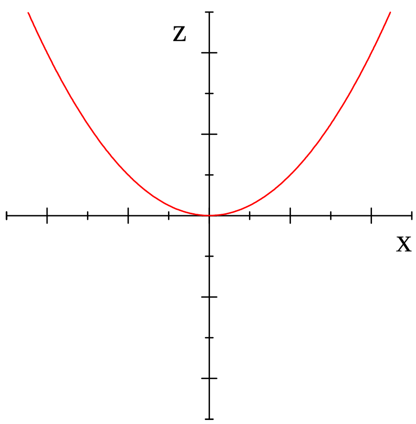

$k > 0$



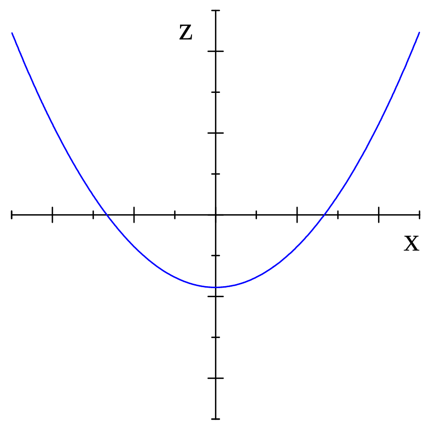

$k < 0$

- $y = k$

$$y = k \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 2pz + \frac{k^2}{b^2}$$ - parabola



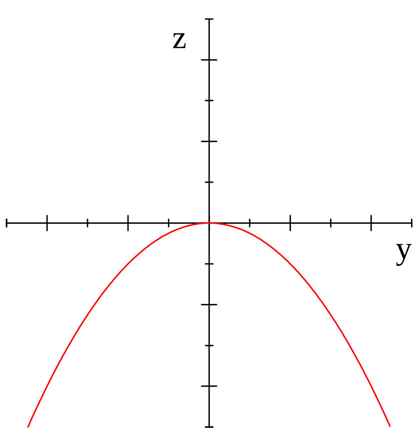

$k = 0$



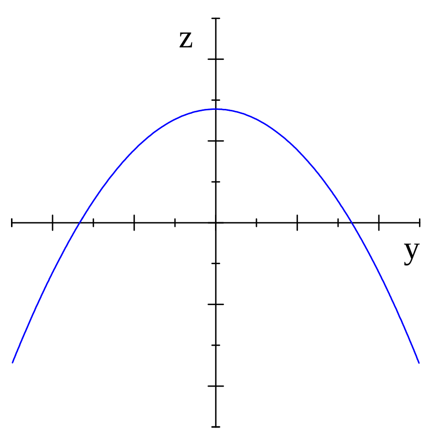

$k \neq 0$

$x = k$

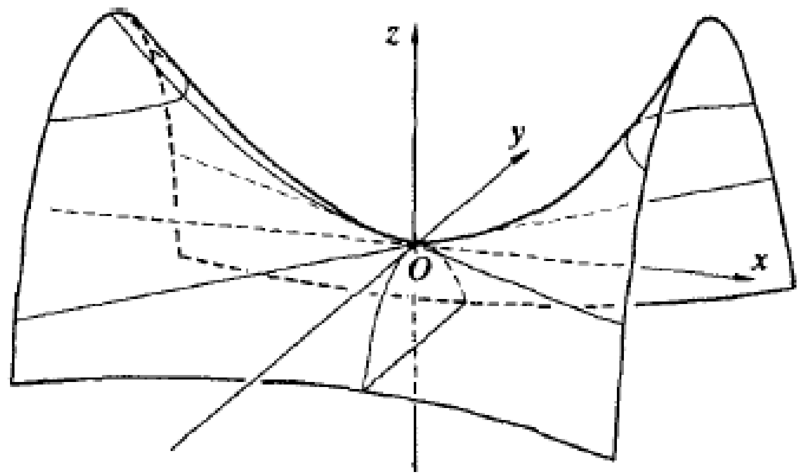
$$x = k \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = -2pz + \frac{k^2}{a^2}$$ - parabola




$k = 0$

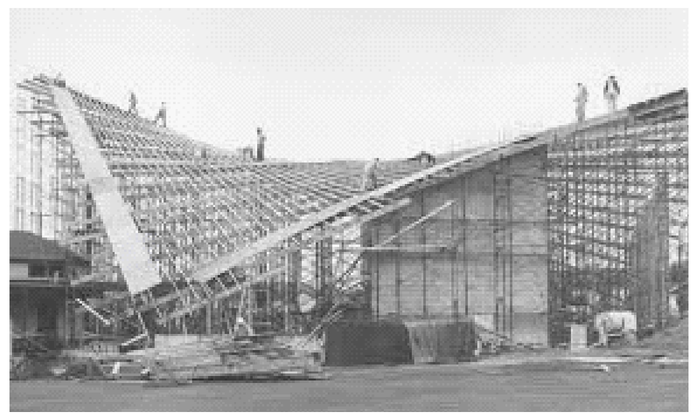



$k \neq 0$



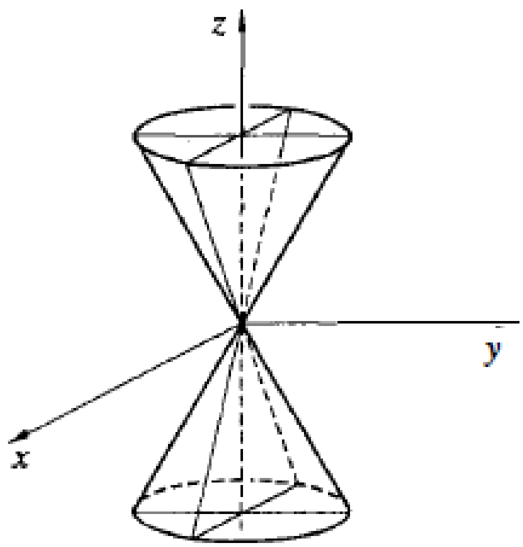

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad Hiperbolički\ paraboloid$$



**6. Konus drugog reda.** Neka je $C \subset E^3$ dana krivulja, a $V \in E^3$ točka koja ne leži na $C$. Plohu izgrađenu od pravaca koju dobijemo spajanjem točke $V$ sa svim točkama krivulje $C$ nazivamo konusna ploha generirana krivuljom $C$. Ako je $C$ bilo koja krivulja 2. reda, dobivamo **konus 2. reda**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$




Presjeci s ravninama:

- $z = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Longrightarrow x = y = 0$$ - točka $O\,(0, 0, 0)$

- $z = k,\ \ k \neq 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} \quad \text{- elipsa}$$

- $x = k$

$$k \ = \ 0 \implies \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \implies z = \pm\frac{b}{c}y \quad \text{- pravci}$$

$$k \ \neq \ 0 \implies \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} \ - \ \text{hiperbola}$$

- $y = k$

$$k \ = \ 0 \implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \implies z = \pm\frac{a}{c}x \quad \text{- pravci}$$

$$k \ \neq \ 0 \implies \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2} \ - \ \text{hiperbola}$$

Uz $a = b$ imamo rotacijski konus.

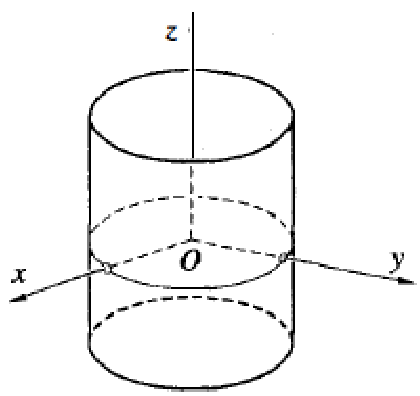
Plohu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

još nazivamo **eliptički stožac**.

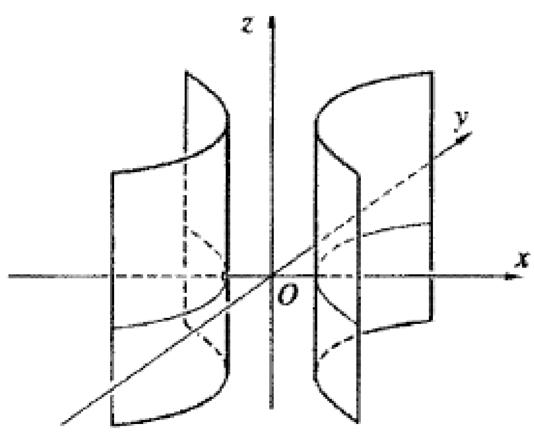
**7. Cilindri drugog reda.** Neka je $C \subset E^3$ bilo koja krivulja i neka je zadan određeni smjer u prostoru (neka klasa paralelnih pravaca). Ploha koju dobijemo tako da svakom točkom krivulje $C$ položimo pravac tog danog smjera nazivamo cilindrična ploha generirana krivuljom $C$. Ako je $C$ krivulja 2. reda, imamo tri tipa takvih ploha:

- **eliptički cilindar**



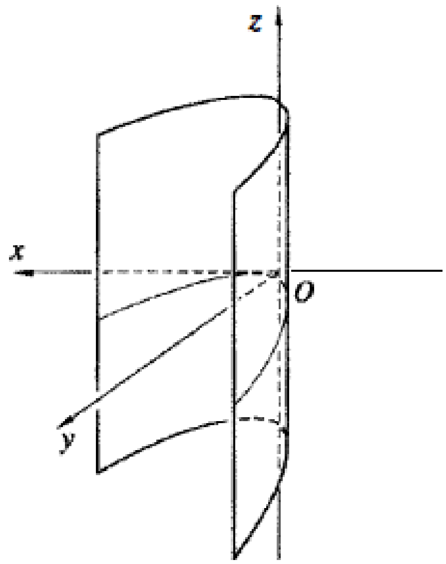

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- **hiperbolički cilindar**




$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

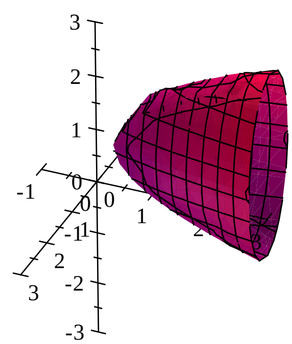
- **parabolički cilindar**




$$y^2 = 2px$$

**Primjer** Skicirajte plohu $4x^2+z^2-2z-y+1=0$. Imamo

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + (z-1)^2 = y$$ - eliptički paraboloid



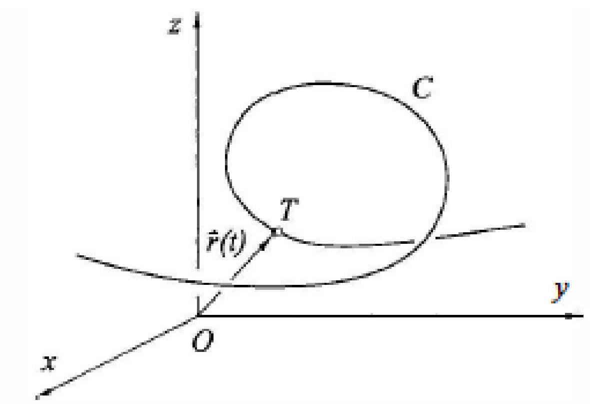
## 2.6 Analitičko predočenje krivulja.

Neka je

$$\vec{r} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad D \subseteq \mathbb{R}$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{5}$$

**vektorska funkcija**, neprekidna u jednoj (realnoj) varijabli $t$. Ako za svaki izbor $t \in D$ interpretiramo (5) kao radijvektor neke točke, uz varijabilni parametar $t$, dobit ćemo u prostoru jednu jednoparametarsku familiju točaka koju nazivamo **krivulja.**




U tom slučaju kažemo da je (5) vektorska jednadžba te plohe. Ako (5) pišemo koordinatno dobivamo

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{6}$$

**parametarsku jednadžbu** krivulje.

Ako iz jednadžbi u (6) eliminiramo parametar $t$, dobivamo

$$x = f(z) \quad y = g(z), \tag{7}$$

odnosno, općenitije

$$F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0. \tag{8}$$

Kako svaka od jednadžbi u sustavu (7) , odnosno u sustavu (8) predočuje analitički neku plohu, svakim od tih sustava je krivulja $C$ predočena kao presjek dviju ploha. Posebno sa (7) je ta krivulja dana kao presjek dviju cilindričnih ploha. Sustave (7) , odnosno (8) nazivamo **opće jednadžbe krivulje** u prostoru.

**Primjeri**

**1. Pravac**

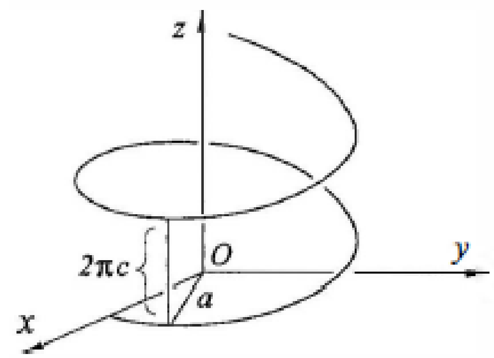
$$\begin{aligned} x &= x_0 + tl \\ y &= y_0 + tm \\ z &= z_0 + tn \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$ je parametarska jednadžba pravca $p$. Dok je s

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

pravac dan kao presjek dviju (neparalelnih) ravnina (sustav tipa (8)).

**2. Cilindrična spirala.** Tu krivulju opisuje točka u prostoru, koja jednoliko rotira u prostoru i istodobno obavlja jednoliku translaciju u danom smjeru.




Iz slike imamo

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \\ z &= ct \end{aligned}$$

što su jednadžbame tipa (6). Eliminacijom parametra $t$ dobivamo

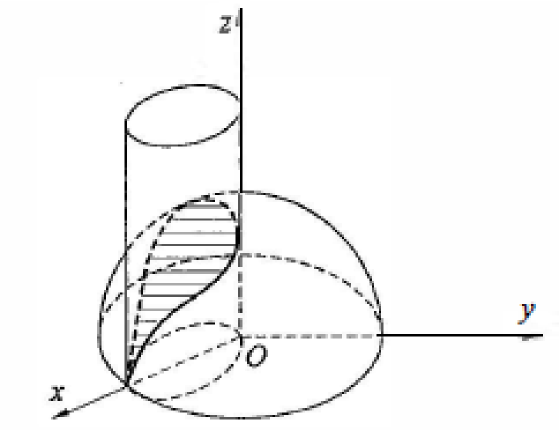
$$x = a\cos\frac{z}{c},\ y = a\cos\frac{z}{c}$$

(sustav (7)), odnosno sustav tipa (8),

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$
$$y - x\,tg\frac{z}{c} = 0$$

što pokazuje da cilindričnu spiralu možemo zadati kao presjek kružnog cilindra i helikoida.

**3. Vivianijev prozor** je krivulja zadana kao presjek sfere i cilindra




tj. kao sustav tipa (8),

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 0.$$

Na slici je dan presjek sfere i cilindra uz uvjet $z \geq 0$.

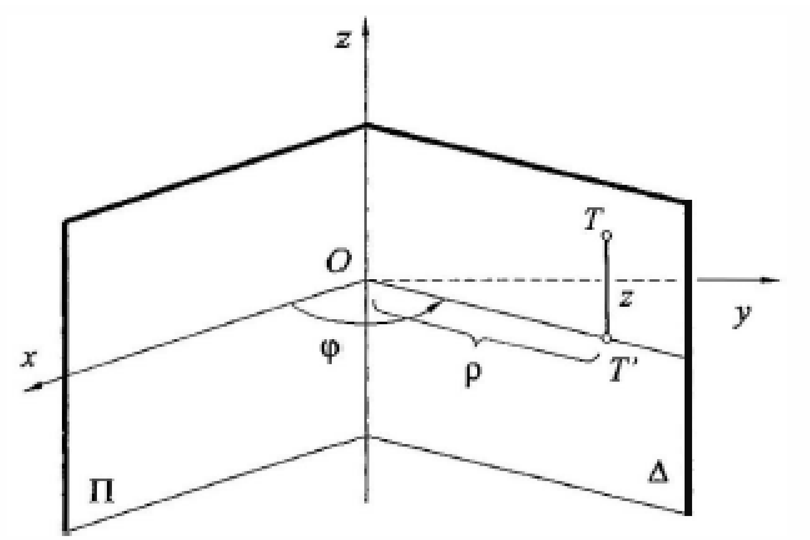
## 2.7 Još neki koordinatni sustavi u prostoru

Zadamo li u prostoru $E^3$ pravokutni (Kartezijev) koordinatni sustav $(O, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \vec{k}))$ :

$$T \in E^3 \longleftrightarrow T \equiv (x, y, z) \quad x,\ y\ , z \in \mathbb{R};$$

**Cilindrični koordinatni sustav.** Odaberimo u prostoru bilo koju točku $O$, orijentirani pravac $z$ koji prolazi točkom $O$ i poluravninu $\Pi$ omeđenu sa $z$. Te fiksne elemente nazivamo redom **pol**, **polarna os** i **polarna poluravnina**.

Neka je $T \in E^3$ bilo koja točka, $\Delta$ ravnina određena točkom $T$ i pravcem $z$, $T'$ ortogonalna projekcija od $T$ na okomicu u $O$ koja leži u ravnini $\Delta$.




Definiramo

$$\varphi = \measuredangle\left(\Pi, \Delta\right), \quad \rho = \left|\overline{OT'}\right|, \quad z = \overline{TT'}. \qquad (9)$$

Uređenu trojku $(\varphi,\rho,z)$ , gdje je $\varphi\in[0,2\pi)$ , $\rho\in[0,\infty)$ , $z\in\mathbb{R}$, nazivamo **cilindrične koordinate točke** $T$

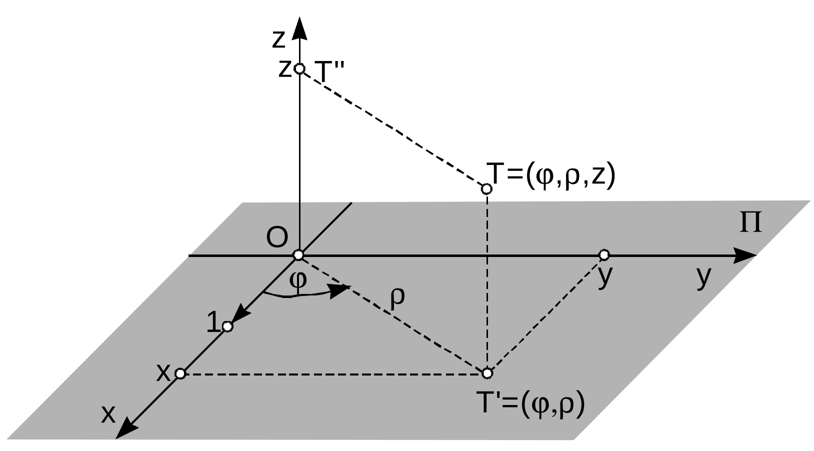
$$T\in E^3 \longleftrightarrow T\equiv(\varphi,\rho,z),$$

$$\varphi\in[0,2\pi)\,,\ \rho\in[0,\infty)\,,\ z\in\mathbb{R},$$

a pridruživanje dano s (9) **cilindrični koordinatni sustav** u $E^3$.

- Ako odaberemo pravokutni koordinatni sustav kao na gornjoj slici imamo vezu

$$T\equiv(\varphi,\rho,z)\longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\end{array}\right\}\longrightarrow T\equiv(x,y,z)$$



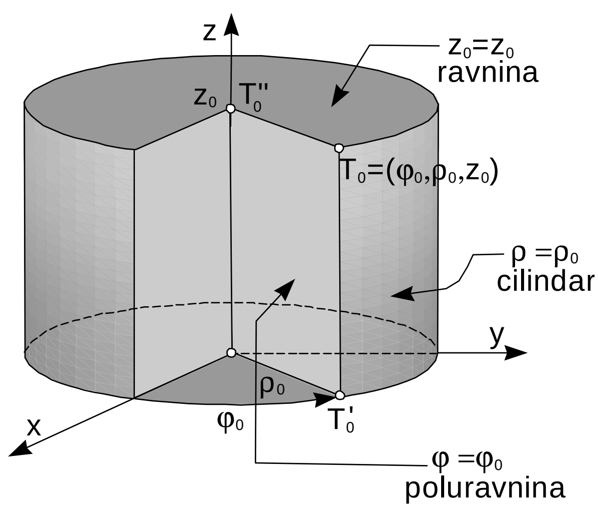
Odnosno

$$T \equiv (x,y,z) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\varphi = \frac{y}{x}\ (!) \\ z = z \end{array} \right\} \longrightarrow T \equiv (\varphi,\rho,z).$$

<u>Koordinatne ravnine</u>: U Kartezijevom koordinatnom sustavu se točka $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dobiva kao presjek "koordinatnih" ravnina $x = x_0$, $y = y_0$ i $z = z_0$.

U cilindričnom koordinatnom sustavu točka $T_0 = (\varphi_0, \rho_0, z_0)$ dobiva se kao presjek "koordinatnih ravnina":

- $\varphi = \varphi_0$ (poluravnina određena sa $z$-osi i točkom $T_0$),
- $\rho = \rho_0$ (to je cilindar, tj. sve točke u prostoru za koje je udaljenost od $z$- osi jednaka $\rho_0$),
- $z = z_0$ (ravnina)



**Sferni koordinatni sustav**. Odaberimo u prostoru iste fiksne elemente kao za cilindrični sustav. Definirajmo

$$\varphi = \measuredangle\left(\Pi, \Delta\right), \quad r = \left|\overline{OT}\right|, \quad \vartheta = \measuredangle\left(z, \overline{OT}\right). \qquad (10)$$

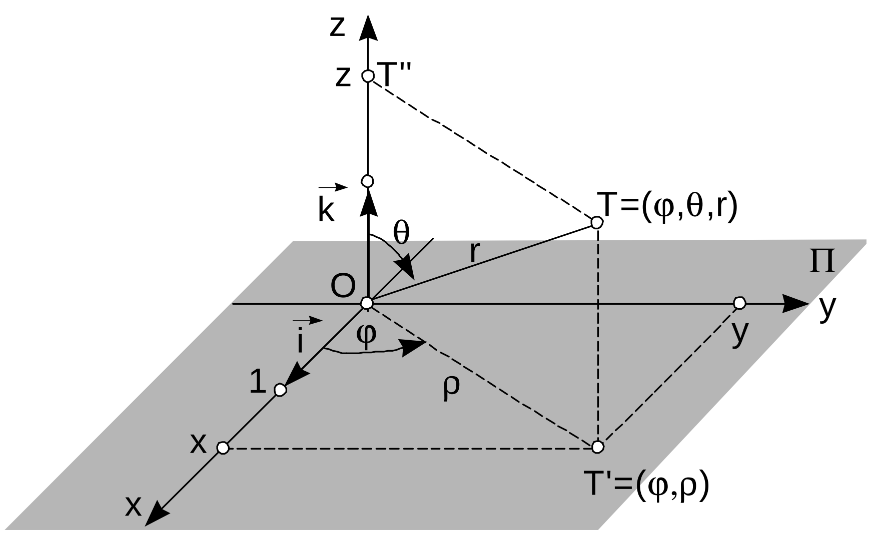
Uređenu trojku $(\varphi, \vartheta, r)$, gdje je $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $r \in [0, \infty)$, nazivamo **sferne koordinate točke** $T$

$$T \in E^3 \longleftrightarrow T \equiv (\varphi, \vartheta, r),$$

$$\varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, \pi], r \in [0, \infty),$$

a pridruživanje dano s (10) **sferni koordinatni sustav** u $E^3$.

Ako odaberemo pravokutni koordinatni sustav kao prije, imamo vezu



$$T \equiv (\varphi, \vartheta, r) \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\cos\vartheta \end{cases} \longrightarrow T \equiv (x, y, z);$$

$$T \equiv (x, y, z) \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \text{ (!)} \\ \cos\vartheta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases} \longrightarrow T \equiv (\varphi, \vartheta, r).$$

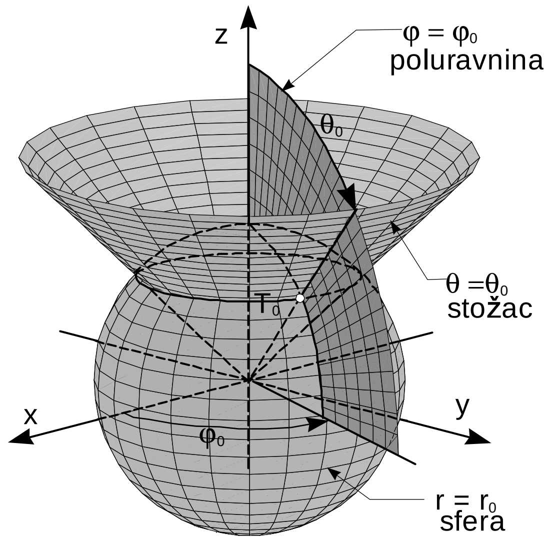
Ako je $T$ na pozitivnoj zraci $z$-osi onda su joj sferne koordinate $(0, 0, r)$, a na negativnoj - $(0, \pi, r)$. Ishodištu $O$ se pridijeljuju sferne koordinate $(0, 0, 0)$).

Koordinatne ravnine U sfernom koordinatnom sustavu $(O, \varphi, \vartheta, r)$ točka $T_0(\varphi_0, \vartheta_0, r_0)$ dobiva se kao presjek "koordinatnih ravina":

- $\varphi = \varphi_0$ (poluravnina određena sa $z$-osi i točkom $T_0$),

- $\vartheta = \vartheta_0$ - stožac s vrhom u ishodištu $O$,

- $r = r_0$ - sfera sa središtem u ishodištu $O$ i radijusa $r_0$.




**Primjer** Točka $T_1 = \left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$ zadana u pravokutnom koordinatnom sustavu ima u sfernom koordinatnom sustavu prikaz

$$T_1 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, 4\right)$$

jer je

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{2\sqrt{3}}{0} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\cos\vartheta_1 = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \vartheta_1 = \frac{2\pi}{3},$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{0^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = 4.$$