1. UVOD

U vremenima prije pojave kompjutera arhitekti, inženjeri i umjetnici crtali su svoje projekte za zgrade, ceste, strojne dijelove, linije broda, itd. upotrebom olovke, papira i raznih pomagala za crtanje. Ta pomagala uključivala su ravnala i kutnike za crtanje ravnih linija, šestare za crtanje krugova i kružnih lukova, trokute i kutomjere za crtanje preciznih kutova.

Naravno, mnogi zanimljivo oblikovani objekti nisu se mogli crtati primjenom ovih jednostavnih alata, jer su sadržavali zakrivljene dijelove koji nisu bili samo krugovi ili elipse. Često, krivulja koja se crtala trebala je glatko prolaziti kroz niz predefiniranih točaka. Ovaj problem je posebno bio izražen u brodogradnji; iako su vješti crtači i umjetnici mogli rukom nacrtati takve krivulje na papiru, brodograditeljima su bili potrebni nacrti u prirodnoj veličini (ili približno prirodne veličine), a zakrivljene krivulje takve veličine bilo je nemoguće nacrtati rukom. Kao pomoć kod izrade nacrta broda u prirodnoj veličini crtači su upotrebljavali duge, tanke i fleksibilne letvice (splines) izrađene od drva, plastike ili metala. Letvice su zadržavane u određenom položaju pomoću niza utega (ducks). Rezultirajuće krivulje bile su glatke, a zakrivljenost im je varirala ovisno o položaju utega. Pojavom kompjutera i njihovim uključivanjem u proces projektiranja fizičke karakteristike takvih letvica su istražene tako da se njihov oblik može matematički definirati i modelirati pomoću kompjutera.

Brodske linije, koje bi bile matematički određene, veoma su dugo privlačile mnoge projektante, osobito zbog toga, što su očekivali da će pomoću njih olakšati proračune geometrijskih veličina broda, kao i proračunavanje njegovog otpora.

Pojavom i razvojem kompjutera razvijene su mnoge nove metode za matematičko definiranje forme trupa broda. Podaci o formi pohranjeni u kompjuteru mogu se primjenom raznih programa koristiti za razne projektne proračune i jednostavnu manipulaciju nacrta. U današnje vrijeme osim matematičkog definiranja linija broda sve više se razvijaju i primjenjuju metode matematičkog opisivanja ploha.

U nekoliko posljednjih desetljeća matematička formulacija forme brodskog trupa se značajno razvila:

- 1950. – 1975. Upotreba polinoma i kombinacija kružnih lukova
- ±1965. Proširenje polinoma u "Bezier-ove krivulje"
- 1974. Proširenje Bezier-ovih krivulja u B – spline (skraćeno od Basis spline) krivulje koje mogu biti, ovisno o parametrizaciji, ujednačeni B – spline (Uniform B – Spline, skraćeno UBS) ili neujednačeni B – spline (Non-Uniform B – Spline, skr. NUBS)
- ± 1980. Racionalni B – spline. Postoje 2 oblika: a) ujednačeni racionalni B – spline (Uniform parametrized Rational B – Splines, skr. URBS) i b) neujednačeni racionalni B – spline (Non-Uniform paremetrized Rational B – Spline, skr. NURBS)
- ± 1990. Bezier-ove, B – spline i NURBS plohe koje su danas *de facto* standard u brodogradnji

Najvažnije metode matematičkog definiranja forme trupa broda opisane su u nastavku.

2. TAYLOROVE MATEMATIČKE LINIJE

Taylor je svoje matematičke linije iznio prvi put već 1915. godine. Taylor-ove matematičke linije se obično upotrebljavaju za opisivanje krivulje areale rebara, krivulje konstruktivne vodne linije, i za krivulje rebara. Za povezivanje niza točaka jednom glatkom krivuljom, Taylor se služi jednadžbom parabole određenog stupnja (polinomi).

2.1. Vodne linije i krivulja areale rabara.

Osnovna jednadžba za opisivanje vodnih linija i krivulje areale rebara, po Tayloru glasi:

$$y = tx + ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 \tag{1}$$

gdje su:

- y – poluširina ili ordinata krivulje areale rebara na bilo kojem rebru, izražena postotkom najveće širine, odnosno najveće ordinate areale.
- x – udaljenost rebra od početka krivulje, izražena dijelom dužine od početka krivulje do najveće ordinate.
- t – nagib krivulje na početku. t je brojčano jednak odsječku što ga tangenta na početak krivulje odrezuje na najvećoj ordinati.

Uvjeti za rješavanje jednadžbe (1) su:

a) y = 1, kad je x =1, (Ovim uvjetom određeno je jedino mjerilo krivulje i njeni krajevi.), tada je $\int_0^1 y\,dx = \varphi$, gdje je φ – koeficijent površine ispod krivulje. (Ovaj uvjet izražava činjenicu da je, uz najveću ordinatu i apscisu jednake jedinici, površina ispod krivulje jednaka koeficijentu punoće te krivulje.).

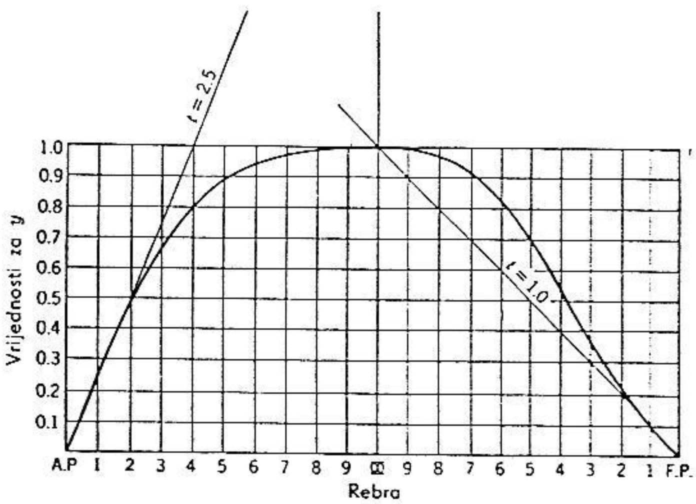
b) $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 0$. Ova jednadžba pokazuje da je pri maksimalnoj ordinati krivulja paralelna s osi X.

c) $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1} = \alpha_1$, Ovom jednadžbom je izraženo da na apscisi x = 1 krivulja mijenja smjer nagiba. Veličina u promjeni nagiba može biti negativna (uvijek vrlo mala) ili jednaka nuli, a nikako ne može biti pozitivna.

Uvrštavanjem uvjeta u osnovnu jednadžbu i njenim sređivanjem dobije se:

$$y = C_y + \varphi C_\varphi + tC_t + \alpha_1 C_\alpha$$

Koeficijenti C_y, C_φ, C_t, C_α ovise samo o x. To znači da za neke određene vrijednosti t, α_1 i φ možemo izračunati ordinatu na svakom rebru i konstruirati krivulju.



Slika 1. Taylor-ove linije: vodne linije i krivulja areale rebara

2.2. Rebra

Za opisivanje rebara Taylor je razvio parabolu četvrtog stupnja za opisivanje rebara s koeficijentom manjim od 0,75, a hiperbolu za rebra s koeficijentom preko 0,67. Preporučena granica između 2 područja je 0,72. Parabola služi za oštrija, a hiperbola za punija rebra.

2.2.1. Oštra rebra

Osnovna jednadžba za oštrija rebra:

$$y = lx + ax^2 + bx^3 + cx^4$$

gdje je:

- y–poluširina, na nekoj vodnoj liniji, izražena postotkom širine na konstruktivnoj vodnoj liniji
- x–udaljenost od osnovice, u dijelovima gaza
- m–koeficijent površine rebra
- l–recipročna vrijednost uzvoja dna izražena omjerom

Pretpostavke za rješavanje jednadžbe:

a) kod x =1, je y = 1, Ovom jednadžbom određena je krajnja točka krivulje, a i to da je gaz jednak jedinici

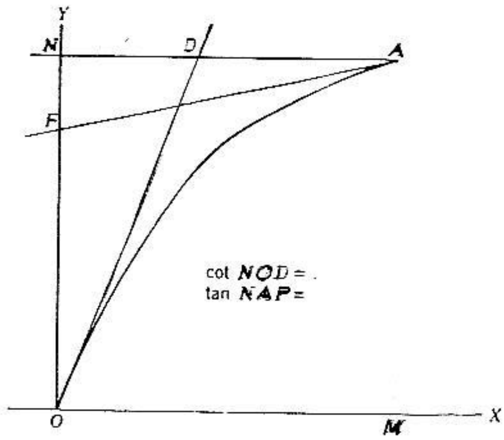
b) Tada je i $\int_0^1 y\,dx = m$, Ova jednadžba pokazuje da je veličina bezdimenzionalnim dimenzijama određene krivulje jednaka koeficijentu te površine

c) $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = f$, Ovom jednadžbom određen je nagib rebra na vodnoj liniji. Kad širina rebra raste f je pozitivan, kad se širina smanjuje f je negativan, a kad su rebra vertikalna na vodnoj liniji f je jednak nuli.

Uvrštanjem uvjeta jednadžba za rebra glasi:

$$y = Y + Mm + Ff + Ll,$$

gdje su Y, M, F i L samo funkcije od x. Tako se za pojedine x i pretpostavljene vrijednosti m, f i l mogu izračunati ordinate rebara, te se rebra mogu konstruirati.



Slika 2. Taylor-ove linije: oštra rebra

2.2.2. Puna rebra

Osnovna jednadžba za puna rebra:

$$y = ax + b - \frac{d}{x+c}$$

gdje su:

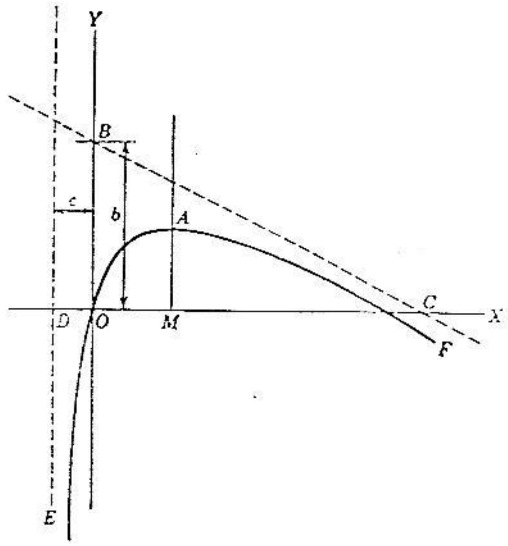
- b – ordinata nagnute asimptote kod x = 0
- c – udaljenost vertikalne asimptote od osi Y

Uvjeti za rješenje jednadžbe su:

a) y = 1 kad je x = 1, y = 0 kad je x = 0

Uvjeti b) i c) su kao i za oštra rebra. Uvrštavanjem i rješavanjem se dobije konačna jednadžba:

$$y = fx + (1\text{-}f)(1+c)^2 \left[1 - \frac{cx}{(1+c)^2} - \frac{c}{x+c}\right]$$



Slika 3. Taylor-ove linije: puna rebra

Korištenje parabole određenog stupnja kao krivulje za povezivanje niza točaka za brodograđevnu praksu nije prihvatljivo zbog specifičnosti oblika krivulja koje opisuju brodsku formu.

Nedostaci ovih krivulja su :

- tendencija osciliranja
- nemogućnost dobivanja glatke krivulje
- nemogućnost dobivanja gradijenta u zadanoj točki

Zato je bilo potrebno potražiti drugi tip matematičke krivulje koja će moći interpretirati brodske krivulje.

3. PARAMETARSKI ZADANE FUNKCIJE

Krivulje koje bolje odgovaraju brodograđevnim potrebama od parabola su spline-ovi.

Neka imamo niz točaka:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots , (x_n, y_n),$$

za koje vrijedi $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Takav niz točaka moguće je aproksimirati funkcijom koja ima karakteristike:

- u svakom intervalu $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $i = 1,2, \ldots, n$, y (x) je polinom trećeg stupnja
- y (x), prva i druga derivacija od y (x) su neprekinute u danim točkama.

Krivulja koja odgovara ovim zahtjevima je kubični spline i izraz za y (x) glasi:

$$y (x) = y_i + a_i (x - x_i) + b_i (x - x_i)^2 + c_i (x - x_i)^3$$

Međutim, kod opisivanja brodske forme nije moguće uvijek prikazati linije direktnim funkcijama oblika $y = f(x)$ jer one za svaku vrijednost x daju samo jednu vrijednost y. Npr. direktnom funkcijom se ne može opisati ni tako jednostavan oblik kao što je krug. Kod definiranja brodskih linija nismo u mogućnosti udovoljiti uvjetu $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Rješenje problema je u parametarskom prikazivanju jednadžbe krivulje između pojedinih čvorova.

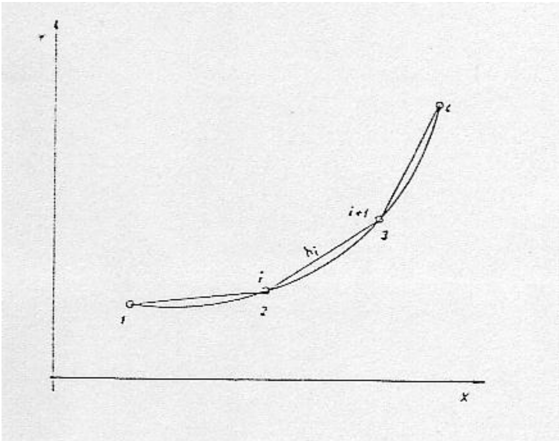
Općenito, tako opisane krivulje imaju oblik:

$Q(t) = [X(t), Y(t), Z(t)]$, gdje su X, Y i Z funkcije zavisne o parametru t.

Npr. kod brodskih linija kao parametar može poslužiti kumulativna duljina tetive, odnosno, zbroj stranica mnogokuta do točke i:

$$t_{i+1} = t_i + \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

Uvjet $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ prelazi u uvjet $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$



$h_i = t_{i+1} - t_i$, $t_1 = 0$

Slika 4. Stranice mnogokuta kao parametar spline-a

Sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica formiramo na način:

- formirati jednadžbe x(t) i y(t) za prvi i drugi segment
- naći derivaciju $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ za prvi i drugi segment
- odrediti iznos derivacije prvog segmenta na desnom kraju i iznos derivacije drugog segmenta na lijevom kraju

Postupak se ponavlja za sve točke od i = 2 do i = n – 1. Dvije jednadžbe koje nedostaju formiraju se iz rubnih uvjeta. Za potrebe opisivanja brodske forme korisno je unaprijed definirati tipove krivulja sa karakterističnim početkom i završetkom.

4. BEZIEROVE KRIVULJE

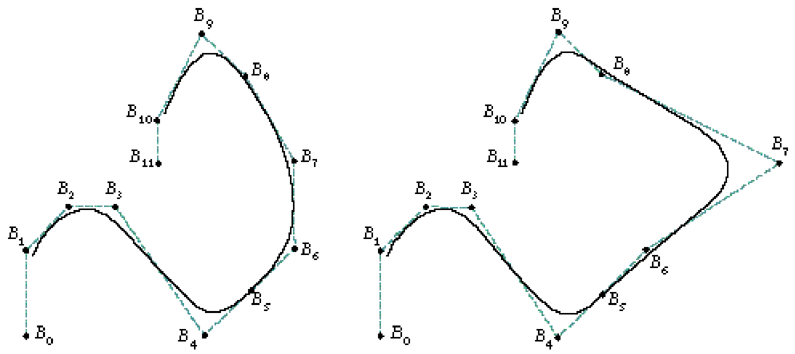
Bezier-ova krivulja je parametarski zadan polinom definiran sa:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot B_i^n(t), \; 0 \le t \le 1,$$

gdje su:

$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, Bernstein-ovi polinomi n-tog stupnja

P_i , i = 0, …, n su kontrolne točke (Jedna od glavnih karakteristika i Bezier i spline krivulja je da je njihov oblik određen (između ostalog) i pozicijama skupa točaka zvanih kontrolne točke. Kontrolne točke su često povezane linijama zbog lakšeg uočavanja i razjašnjavanja njihovog odnosa naspram krivulji. Ove linije formiranju tzv. kontrolni poligon.



Slika 5. Kontrolne točke (B_i)i kontrolni poligon

Bezier-ove krivulje imaju sljedeće karakteristike:

- Krivulja Q(t) aproksimira oblik kontrolnog poligona glatkom linijom. Krivulja prolazi kroz dvije krajnje točke poligona i prva i zadnja stranica poligona su joj tangente
- Pomicanje točaka P_i kontrolira oblik krivulje
- Pomicanje jednog vrha utječe na čitavu krivulju

- Moguće je povezati Bezier-ove krivulje s kontinuiranim derivacijama (kao spline-ove). Kontinuiranost prve i druge derivacije moguće je postići uz mali gubitak u kontroli čvorova.

Osnova Bezier-ove metode u upotrebi tzv. 'blending' funkcija. Ponašanje krivulje se kontrolira s četiri točke. Četiri blending funkcije predstavljaju utjecaj koji svaka kontrolna točka ima na krivulju.

Nedostaci ove metode su u tome što blending funkcije utječu na sve točke na krivulji. Drugim riječima ne postoji lokalizirana kontrola nad krivuljom. Također, broj kontrolnih točaka utječe na stupanj krivulje. Što je veći stupanj krivulje to je veći nedostatak kontrole nad krivuljom.

5. SPLINE KRIVULJE

5.1. Definicija spline funkcije

Matematički polinomska funkcija Q(t), skalarnih ili vektorskih vrijednosti, definirana na intervalu $[t_0, t_n]$, uz $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n$, k-tog reda (k-1 stupnja) zove se spline i ima sljedeće značajke:

- Q je polinom stupnja (k-1) u svakom podintervalu raspona (t_i, t_{i+1})
- Q i njene derivacije reda 1, …, k-2 su kontinuirane (neprekinute) u intervalu $[t_0, t_n]$

Vektor T = $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ zove se vektor čvora (knot vector), a točke $t_0, \dots, t_n$ čvorovi.

5.2. Kubični spline

Prirodna polazna točka u proučavanju spline funkcija je kubični spline zbog svoje sličnosti s letvicama za crtanje linija. To je kontinuirani kubni polinom koji interpolira kontrolne točke.

Zadano je (n+1) točaka P_i , i = 0, …n i njihovih pripadnih čvorova t_i. Potrebno je naći funkciju Q(t) za interval $[t_0, t_n]$ takovu da je za svaki raspon ta funkcija kubični parametarski polinom i da ima drugu derivaciju kontinuiranu (neprekinutu). Krivulja koja odgovara ovim zahtjevima je kubični spline, i predstavlja u stvari elastičnu liniju grede krutosti EI = 1 s osloncima u čvornim točkama (Ako se napravi usporedba s letvicama za crtanje brodskih linija onda su čvorovi mjesta podupiranja letvice utezima, a rasponi su udaljenosti između dvaju utega.).
Za neki raspon $[t_k, t_{k+1}]$ pri čemu je $l_k = t_{k+1} - t_k$ se onda može napisati:

$$Q_k(t) = a_k + b_k (t-t_k) + c_k (t-t_k)^2 + d_k (t-t_k)^3$$

Za kubične spline krivulje vrijedi:

1. Zakrivljenost krivulje na svakom rasponu može biti prikazana kubičnim polinomom (interpolacija po dijelovima krivulje kubnim polinomima)
2. Krivulja, njezini nagibi (prve derivacije), i momenti savijanja koji su proporcionalni drugoj derivaciji funkcije su kontinuirani kroz čitavu duljinu spline-a, tj, druga derivacija krivulje je kontinuirana.
3. Treća derivacija je diskontinuirana na krajevima osim u slučaju kada su sile u osloncima jednake nuli.

Koeficijenti polinoma kubičnog spline su zavisni o svih n kontrolnih točaka, njihovo računanje uključuje računanje inverzne matrice sa (n+1) x (n+1) elemenata. To ima za posljedicu dvije negativnosti:

- pomicanje bilo koje kontrolne točke utječe na cijelu krivulju

– računanje velike inverzne matrice je u suprotnosti sa brzim interaktivnim modificiranjem oblika krivulje

Glatkoća krivulje ovisi u potpunosti o zadanim točkama. U stvari, svako iskrivljenje podataka, npr. greška u očitanju, se pojačava u procesu interpolacije krivulje. Kubični spline je koncipiran tako da svaka lokalna promjena utječe na cijelu krivulju tako da ispravljanje greške na jednom mjestu može izazvati neželjene promjene bilo gdje na krivulji. To znači da je upotreba kubični spline-ova ograničena samo na slučajeve gdje su kvalitetno zadane točke kroz koje treba povući liniju.

5.3. B-spline (Basis spline)

B-spline funkcije nadilaze probleme koji su prisutni kod Bezier-ovih krivulja, dajući skup blending funkcija koje utječu samo na nekoliko kontrolnih točaka. Ovo daje mogućnost lokalne kontrole nad krivuljom koja je nedostajala kod Bezier-a.

Formulacija B-spline je slična kao definicija Bezier-ovih krivulja, ali ključna razlika je u definiciji blending funkcija. Važna značajka B-spline blending funkcija je da one nisu nula u samo malom dijelu raspona određenog parametra. B-spline dijele mnoge prednosti s Bezier-ovim krivuljama, ali glavna prednost je lokalna kontrola oblika krivulje. Kontrolne točke se mogu dodavati po želji bez povećanja stupnja krivulje, zadržavajući kontrolu nad krivuljom koja bi se izgubila kod Bezier-ovih krivulja.

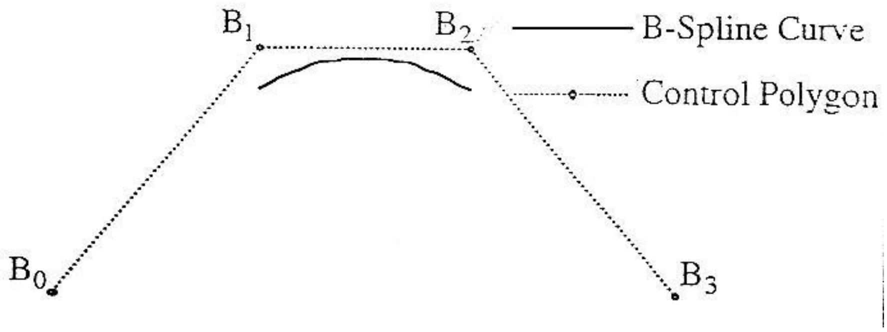
Također, problem spajanja dijelova krivulje je izbjegnut tako što su dozvoljene samo krivulje koje posjeduju zahtijevanu kontinuiranost na čvorovima. Većina drugih spline metoda omogućava ovo s gubitkom lokalne kontrole nad krivuljom.

Kako se B-spline sastoji od dijelova krivulje čiji koeficijenti polinoma ovise o samo nekoliko kontrolnih točaka, pomicanjem kontrolne točke utječe se na izgled krivulje samo u neposrednoj blizini te točke. Time je i vrijeme za računanje koeficijenata bitno reducirano. B-spline ima istu kontinuiranost kao i kubični spline, ali ne interpolira kontrolne točke.

B-spline-ovi su klasa kontinuiranih parametarskih polinoma. B-spline k-tog reda je kontinuirani polinom (k-1) stupnja, kontinuirano diferencijabilan (k-2) puta u čvorovima. B-spline funkcije mogu biti neracionalne (nonrational) i racionalne (rational), ujednačene (uniform) i neujednačene (nonuniform).

Termin "ujednačeni" (uniform) znači da su čvorovi krivulje razmaknuti na jednakim intervalima parametra t.

Termin "racionalni" se upotrebljava ondje gdje su x(t), y(t) i z(t) definirani kao omjer dvaju kubnih polinoma.



Slika 6. Jedan segment B-spline krivulje

5.3.1. Ujednačeni B-spline (Uniform B-spline)

Analitički B-spline krivulja je definirana:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{m-1} P_i \cdot N_{i,k}(t) \text{, gdje su:}$$

P_i, i = 0, …,n kontrolne točke

$N_{i,k}$ (t), bazna funkcija B-spline-a

Za zadani čvorni vektor T = (t_0, t_1, …, t_n) bazna funkcija $N_{i,k}$ (t) definira se na intervalu $t_i \le t \le t_{i+k}$:

Za k = 1

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 \text{ za } t_i \le t \le t_{i+k} \\ 0 \text{ za ostale vrijednosti} \end{cases}$$

za k > 1

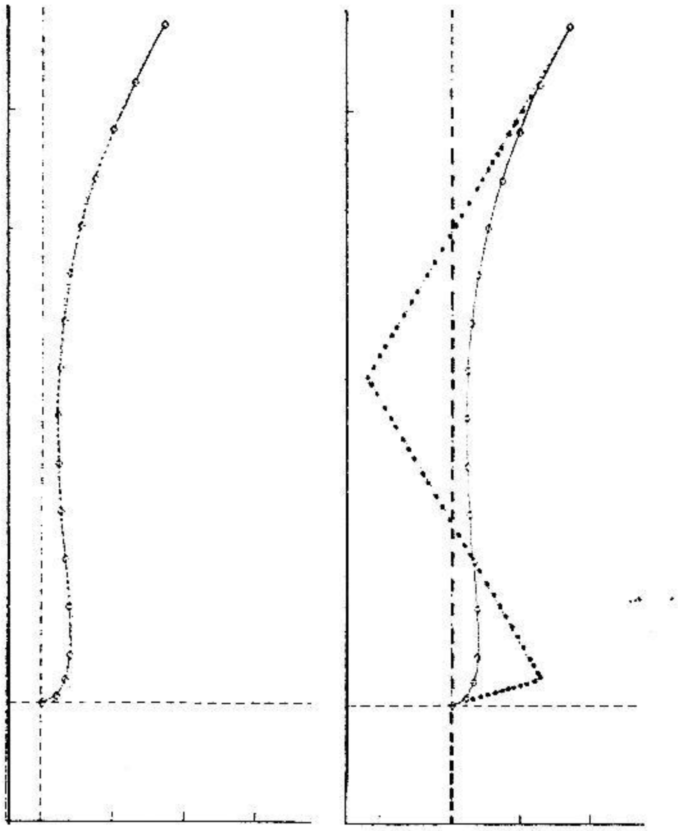
$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \cdot N_{i+k,k-1}(t)$$

5.3.2. Neujednačeni B-spline (NonUniform B-spline)

Neujednačeni neracionalni B-spline dozvoljava nejednaki razmak između čvorova. Ove krivulje imaju nekoliko prednosti nad ujednačenim B-spline-om.

Prvo, kontinuiranost u izabranoj točki spoja može biti reducirana iz druge derivacije na prvu i na nultu. Ako je kontinuiranost reducirana na nultu, onda krivulja interpolira kontrolnu točku, ali bez neželjenih efekata kao kod ujednačenih B-spline-ova, gdje su segmenti krivulje na obje strane interpolirane točke ravne linije.

Isto tako, početna i krajnja točka mogu biti točno interpolirane, bez istovremenog uvođenja linije na segmentu. Moguće je i dodati novi čvor i kontrolnu točku kod neujednačenih B-spline-ova, tako da rezultirajuća krivulja može biti lako preoblikovana što nije moguće kod ujednačenih B-spline-ova.



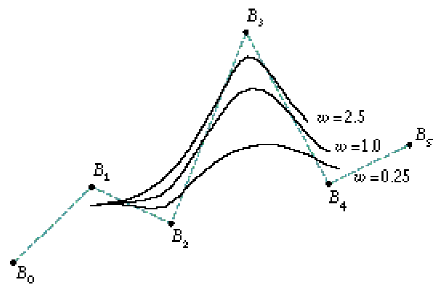
Slika 7. B-spline krivulja kao rebro broda

a) 10 točaka kontrolnog poligona b) 4 točke kontrolnog poligona

5.3.3. Neujednačeni racionalni B-spline (NonUniform Rational B-Spline – NURBS)

Kod NURBS krivulja za opisivanje jedne tro-dimenzionalne kontrolne točke koriste se 4 parametra (x, y, z, w) umjesto samo 3 (x, y, z). Razlog za jedan parametar više je mogućnost točnog prikazivanja koničnih krivulja (krugovi, elipse, parabole i hiperbole), kao i povećana kontrola nad oblikom drugih krivulja. Četvrta koordinata, w, naziva se težina kontrolne točke.

Uobičajeno, svaka kontrolna točka ima težinu 1, što znači sa sve one imaju jednak utjecaj na oblik krivulje. Povećanje težine pojedinačne kontrolne točke daje joj veći utjecaj i ima za efekt "povlačenje" krivulje prema toj točki.



Slika 8. Povećavanje težine kontrolne točke

Krivulje koje su definirane na ovaj način, sa težinom w za svaku kontrolnu točku zovu se racionalne krivulje. Matematički, takve krivulje su definirane u četiri-dimenzionalnom prostoru i projicirane u tro-dimenzionalni prostor.

Analitički NURBS krivulju k-tog reda možemo napisati kao:

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^{m} w_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{m} w_i N_{i,k}(t)}$$

gdje je:

$t \in [t_{k-1}, t_{m+k}]$, $(t_0, \ldots, t_{m+k})$ skup čvorova,

$(P_0, \ldots, P_m)$ skup kontrolnih točaka,

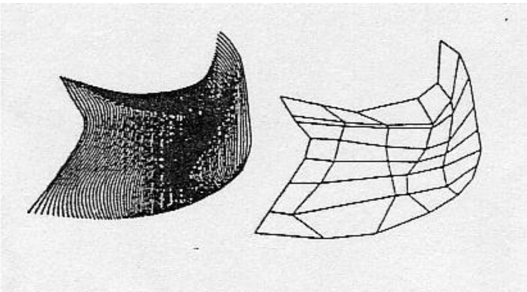
$(w_0, \ldots, w_m)$ skup težina kontrolnih točaka

6. MODELIRANJE FORME PLOHAMA

Kod upotrebe linija za modeliranje forme trupa definira se niz krivulja kao što su vodne linije i rebra koje zajedno daju implicitnu površinu trupa. Glavna prednost metode modeliranja forme trupa matematičkim linijama je jednostavna definicija postojećih formi.

Kod primjene metode ploha površina trupa je opisana sa jednom ili više pravilnih mreža linija koje se protežu duž čitave površine. Manipulacija površine se odvija manipulacijom mreže. Glavna prednost metode definiranja forme trupa pomoću ploha, tj. mreže linija, je u mogućnosti dobivanja brodskih linija (npr. vodne linije, uzdužnice…) presijecanjem plohe ravninama.

Kao i kod definiranja matematičkih linija, tako postoje i različiti načini modeliranja trupa plohama.



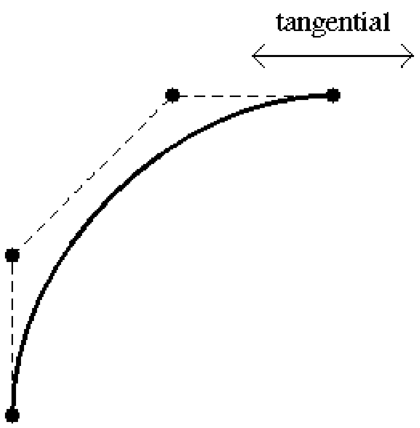
Slika 9. Stvarna površina i generirana mreža linija

6.1. Bezier-ove plohe

Bezier-ove plohe se na jednostavan način dobivaju iz Bezier-ovih krivulja. Bezier-ove površine su samo mreža Bezier-ovih krivulja, pa tako među njima postoje i velike sličnosti.

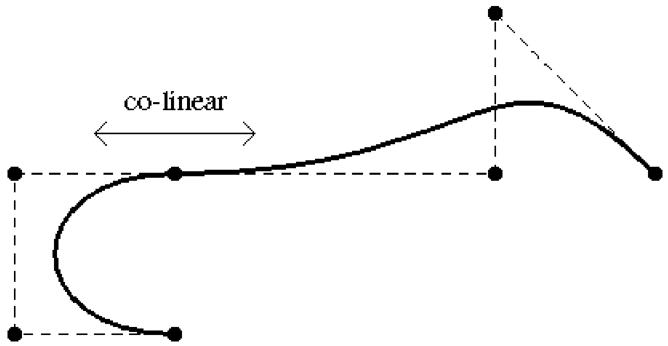
Dvije su bitne značajke vezane uz Bezier-ove površine:

- površina prolazi kroz četiri kutne kontrolne točke na kontrolnoj mreži
- tangenta na površinu je definirana kutnom kontrolnom točkom i susjednom rubnom kontrolnom točkom



Slika 10. Karakteristike Bezier-ove površine

Ove dvije značajke su najvažnije kada treba spojiti dvije površine. Da bi se dobila glatki neprimjetni spoj, zajednička kontrolna točka i dvije unutarnje kontrolne točke na obje strane spajanih površina moraju biti kolinerane.



Slika 11. Spajanje Bezier-ovih površina

Bezier-ova površina se može napisati u obliku:

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} b_{i,j}\, B_i^m(u)\, B_j^n(v)$$

gdje su:

- $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$, parametarske varijable
- B_i i B_j 'blending' funkcije
- n,m broj mrežnih linija kontrolnog poligona

– $b_{i,j}$ točke topološki pravokutnog kontrolnog poligona mreže (u kontekstu dobivanja površine kroz zadani set točaka $b_{i,j}$ su nepoznanice)

Bezier-ove površine su posebno pogodne za modeliranje rotacijskih volumena (npr. cijevi).

6.2. B-spline plohe

Kartezijev produkt B-spline površine je zadan formulom:

$$Q(u,v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} B_{i,j}\, N_{i,k}(u)\, M_{j,l}(v)\,,$$

gdje su:

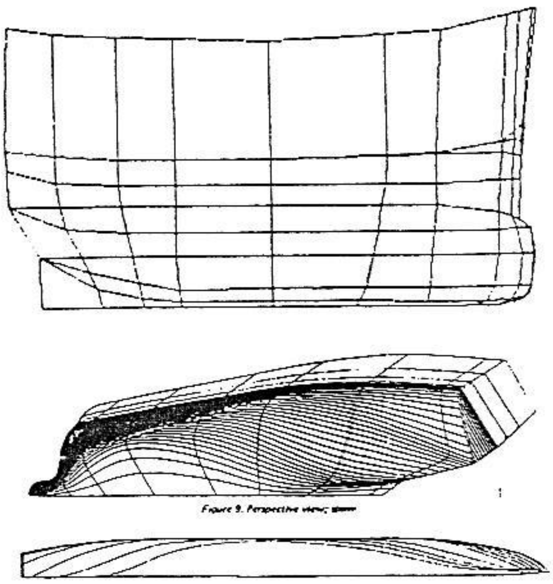
– $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$, parametarske varijable

– k,l su stupnjevi baznih funkcija

– n,m brojevi mrežnih linija kontrolnog poligona

– N, M bazne funkcije (basis function)

– $B_{i,j}$ vrhovi mreže kontrolnog poligona (nepoznanice)



Slika 12. B-spline mreža i površina

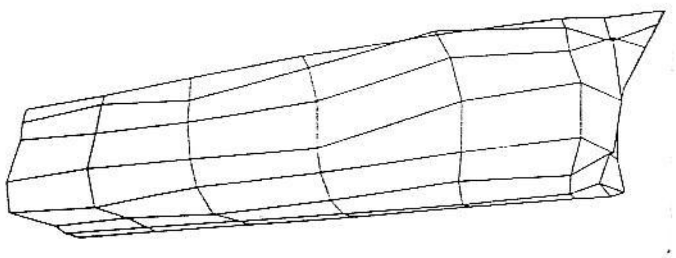
6.3. NURBS plohe

Analitička formulacija NURBS plohe je:

$$Q(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} W_{i,j} B_{i,j} N_i^k(u) N_j^l(v)}{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} W_{i,j} N_i^k(u) N_j^l(v)}$$

gdje su:

- $u \in [u_{k-1}, u_{m+1}]$, $v \in [v_{l-1}, v_{n+1}]$ parametarske varijable
- $B_{i,j}$ kontrolne točke 3D mreže
- $W_{i,j}$ težine kontrolnih točaka
- N_i^k (u), N_j^l (v) bazne funkcije reda k, odnosno l



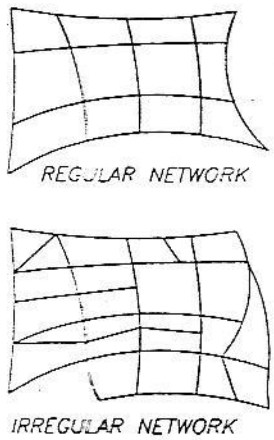
Slika 13. Gruba mreža kontrolnih poligona kod NURBS ploha

Iz gornje formule se vidi da su NURBS plohe opisane u parametarskom obliku, što znači da za svaku vrijednost parametara u i v postoji jedinstvena točka na fizičkoj površini plohe. NURBS plohe omogućavaju lokalnu kontrolu osobina površine što omogućava projektantu laku manipulaciju geometrije površine.

Kada treba tražiti kontrolne točke i pripadne težine w najveći problem se javlja kada se krivulja ili ploha opisuje po dijelovima racionalnim polinomima. Da bismo bili u mogućnosti raditi s takvim funkcijama, moramo biti u mogućnosti imati odvojen pristup do brojnika i nazivnika svake pojedine opisne pod-plohe, drugim riječima treba funkciju zadati u homogenoj formi, što predstavlja problem.
Problem kod NURBS formulacije je integrabilnost razlomka dvaju polinoma, tj. matematički problem integrabilnosti takve funkcije. Plohu je, znači potrebno definirati integrabilnim omjerom polinoma, a to predstavlja glavni problem.

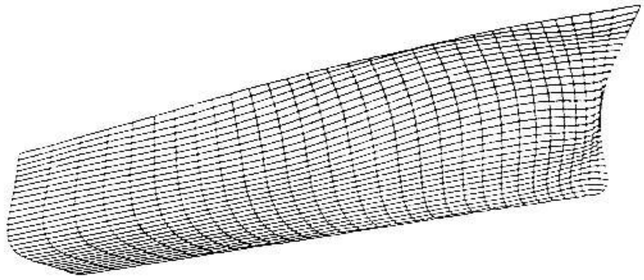
NURBS omogućavaju prikazivanje krivulje, ravnih linija, krugova, parabola, elipsoida i hiperbola sve s jednom formulom pa su najprikladniji za brodogradnju. Uglačavanje linija provodi se metodom najmanjih kvadrata, a za svaku točku mora se definirati njena težina w.

Najprikladniji sistem za modeliranje broda je onaj baziran na nepravilnoj mreži, s geometrijskom formulacijom koja dozvoljava uglačavanja u brodograđevnom smislu.
Kod generiranja nepravilne mreže potrebna je dodatna informacija, tzv. "Boundary Representation", gdje je dan kompletan prikaz odnosa svih točaka linija i površina. Kod ovakvih mreže opis površine se izvodi metodama koje prepoznaju pravilne pod-površine (Conn patches method, Gordon patches method..), što se izvodi potpuno automatski.

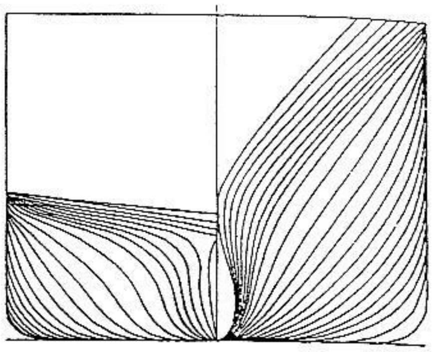


Slika 14. Pravilna i nepravilna mreža

Kada treba tražiti kontrolne točke i pripadne težine w najveći problem se javlja kada se krivulja ili ploha opisuje po dijelovima racionalnim polinomima. Da bismo bili u mogućnosti raditi s takvim funkcijama, moramo biti u mogućnosti imati odvojen pristup do brojnika i nazivnika svake pojedine opisne pod-plohe, drugim riječima treba funkciju zadati u homogenoj formi, što predstavlja problem.



Slika 15. Gusta mreža kontrolnih poligona za opisivanje brodske forme



Slika 16. Nacrt rebara broda izveden iz NURBS površine

Zbog niza navedenih pozitivnih karakteristika NURBS reprezentacija danas je *de facto* standard za opisivanje geometrije ne samo u brodogradnji nego i u većini drugih područja ljudske djelatnosti koja imaju potrebu za geometrijskim modeliranjem objekata.