

Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Eksperimentalna i numerička analiza
slobodnih vibracija grede

Darko Dragojević

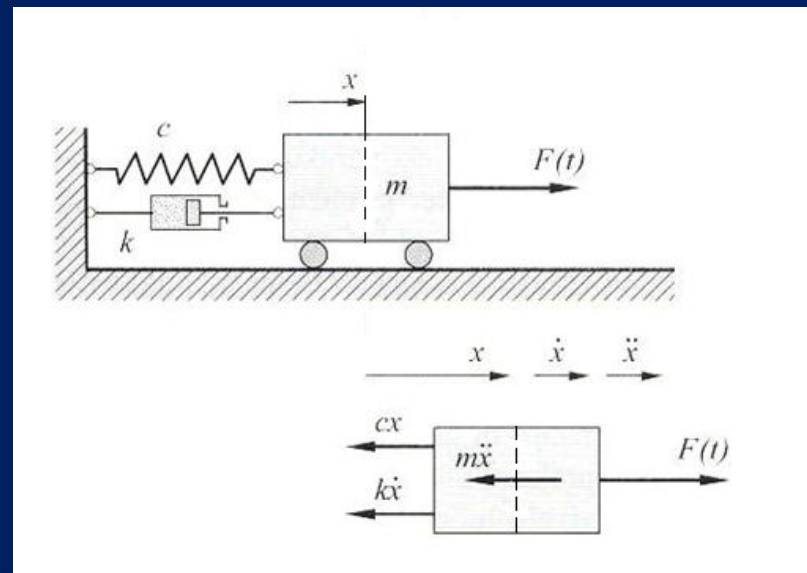
Split, siječanj 2010.

PREGLJED PREZENTACIJE

- Uvod
- Analitičko određivanje slobodnih vibracija konzolne grede
- Određivanje slobodnih vibracija konzolne grede metodom konačnih elemenata
- Eksperimentalno određivanje slobodnih vibracija konzolne grede
- Usporedba rezultata
- Zaključak

➤ 1. Uvod

- Gibanja koja se tijekom vremena uzastopno ponavljaju sa određenom frekvencijom nazivaju se vibracijama.
- Osnovni vibracijski sustav se sastoji od mase, opruge i prigušenja.

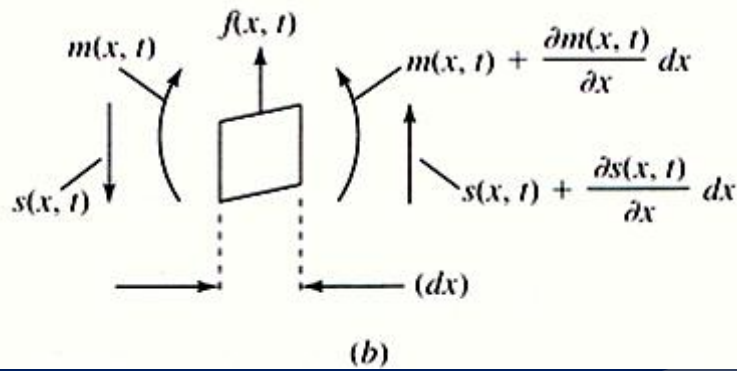
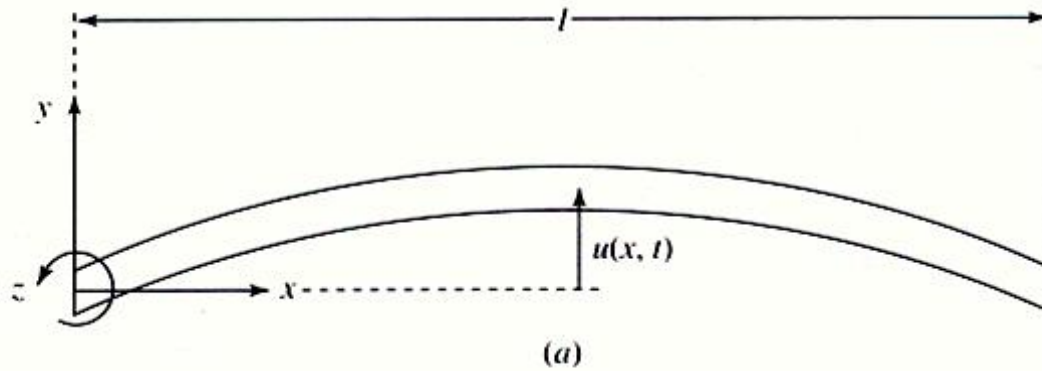


- Forme vibriranja su prirodni način vibriranja slobodnog sustava pripadnom kružnom frekvencijom.
- Sustav od n stupnjeva slobode ima n formi vibriranja.
- Svaka analiza vibracija u sebi uključuje određivanje vlastitih frekvencija i formi vibriranja ispitivanog sustava.
- One se mogu odrediti *analitički*, *numerički* ili *eksperimentalno*.
- U ovom radu vibracijska analiza se radi na primjeru konzolne grede.

➤ 2. Analitičko određivanje slobodnih vibracija konzolne grede

- Pri analizi slobodnih vibracija, greda se opisuje kao raspodijeljeni sustav.
- Pretpostavke pri analizi modela grede:
 1. Vrijede sve pretpostavke o deformiranju i raspodjeli naprezanja iz nauke o čvrstoći.
 2. Deformacije zbog savijanja su puno veće nego deformacije uzrokovane smicanjem .
 3. Rotacijska inercija diferencijalnog elementa je zanemariva prema translacijskoj inerciji (mora biti $L > 10h$).

- Analiza sila u poprečnom presjeku grede



- Nakon što se primijene uvjeti ravnoteže na diferencijalni element grede te ispune sve pretpostavke dobije se jednačba vibracija grede:

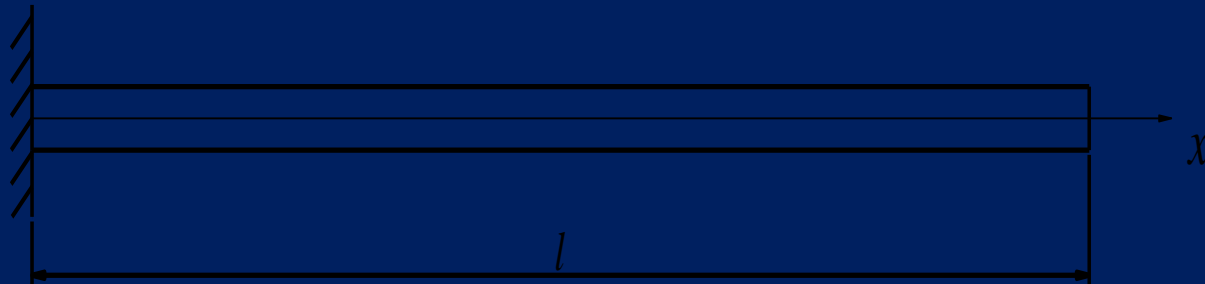
$$\rho \ddot{u} = f(x,t) - EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}$$

- Analiziraju se samo slobodne vibracije i zato je sila uzbude $f(x,t)$ jednaka nuli.
- Kada se riješi gornja diferencijalna jednačba dobije se izraz (1) koji opisuje pomake grede pri slobodnim vibracijama :

$$\varphi(x) = b_1 \cos \beta x + b_2 \sin \beta x + b_3 \cosh \beta x + b_4 \sinh \beta x$$

- gdje je $\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho}{EI}$
 - ω - vlastita frekvencija [rad/s]
 - ρ - specifična masa grede [kg/m]

- **Primjena izraza (1) na konzolnu gredu**



Rubni uvjeti za konzolnu gredu:

1. $u(0,t) = \varphi(0) = 0$ - pomak na mjestu $x=0$

2. $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} = 0$ - nagib na mjestu $x=0$

3. $-EI \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(l)}{\partial x^2} = 0$ - moment savijanja na mjestu $x=l$

4. $-EI \frac{\partial^3 u(l,t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \varphi(l)}{\partial x^3} = 0$ - poprečna sila na mjestu $x=l$

- Ako se izraz (1) derivira odgovarajući broj puta, a zatim se uvrste gornji rubni uvjeti i iskoristi da je $\cos(0)=1$, $\sin(0)=0$, $\cosh(0)=1$, $\sinh(0)=0$ dobije se sustav homogenih jednačbi:

$$\begin{bmatrix} \cos \beta l + \cosh \beta l & \sin \beta l + \sinh \beta l \\ \sin \beta l - \sinh \beta l & -\cos \beta l + \cosh \beta l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

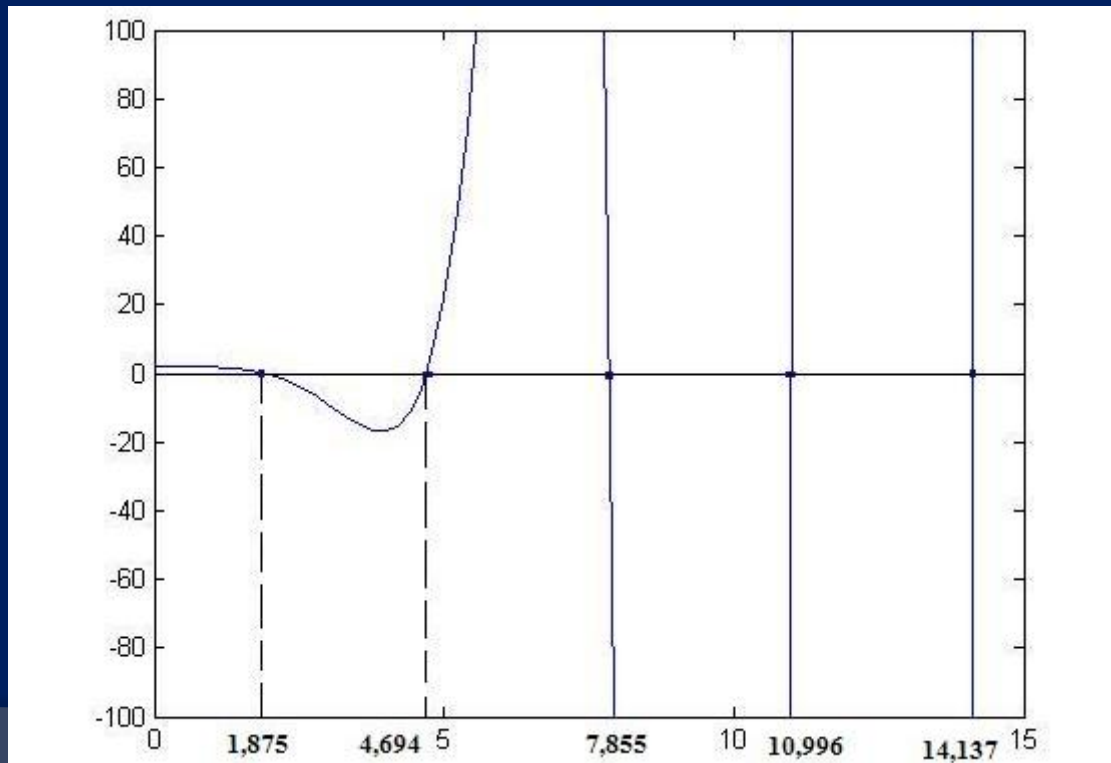
- Gornji sustav ima trivijalno rješenje kada je matrica sustava nesingularna i netrivialno rješenje kada je matrica sustava singularna. Matrica sustava je singularna kada je determinanta jednaka 0.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \beta l + \cosh \beta l & \sin \beta l + \sinh \beta l \\ \sin \beta l - \sinh \beta l & -\cos \beta l + \cosh \beta l \end{vmatrix} = 0$$

- Kada se gornji izraz (determinanta) sredi dobije se transcendentna jednačba

$$\cos \beta l \cdot \cosh \beta l + 1 = 0$$

- Vrijednosti koje zadovoljavaju ovu jednačbu (nul-točke) mogu se dobiti iz grafa funkcije koji se nacrtava pomoću MATLAB-a



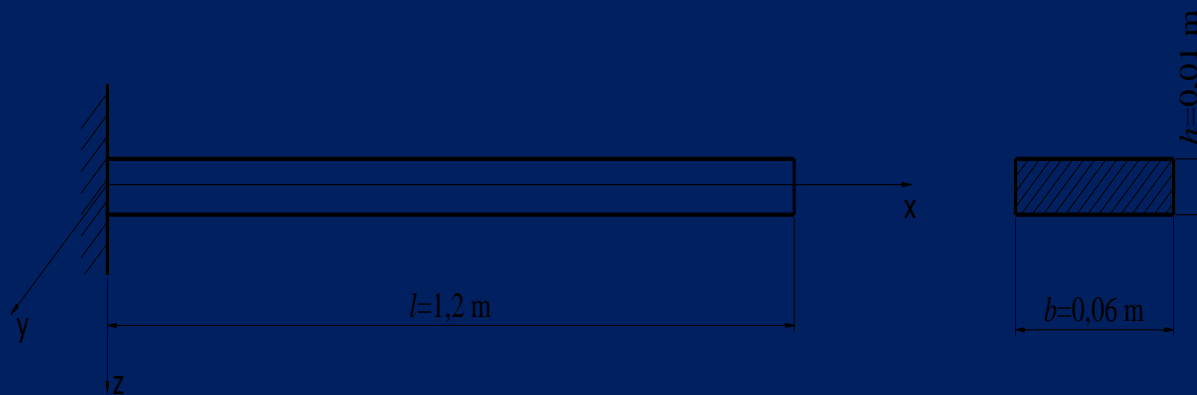
- odakle su vlastite kružne frekvencije :

$$\omega_n = \left(\frac{\beta_n}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad [\text{rad/s}]$$

- i forme vibriranja konzolne grede:

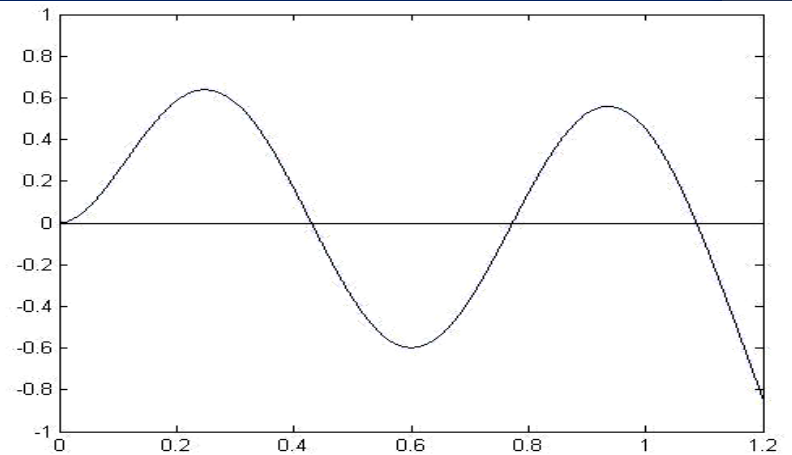
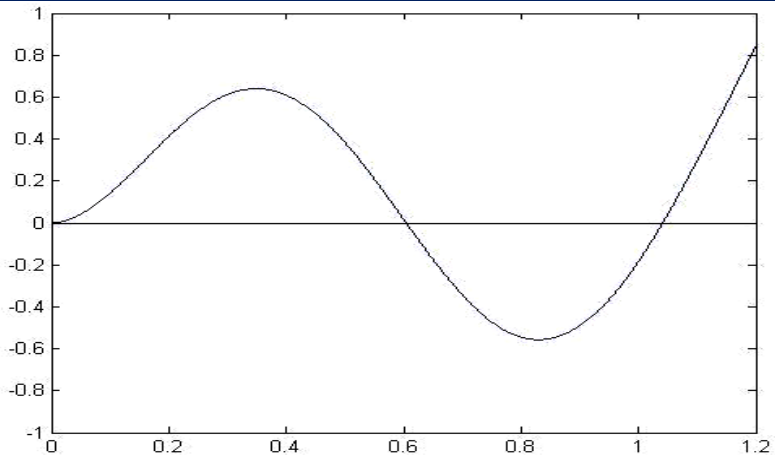
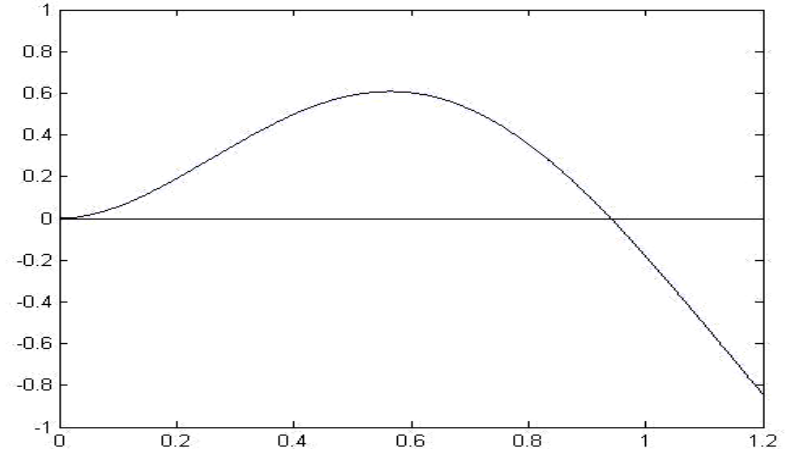
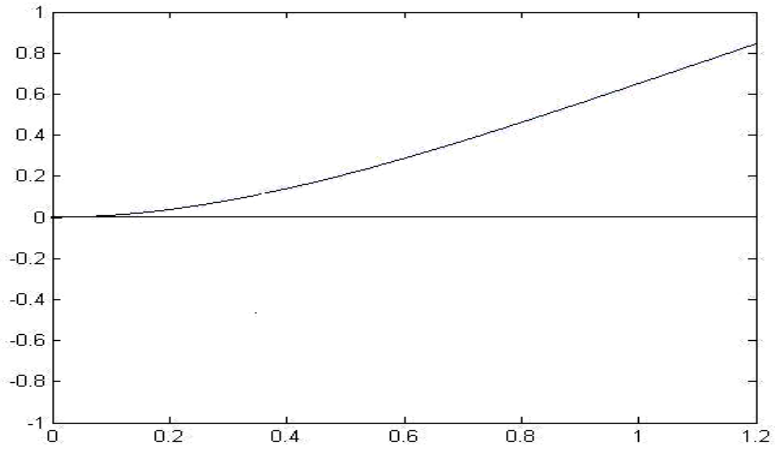
$$\varphi_n(x) = b_1 \left\{ \left[\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x \right] + \left[\frac{-\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l} \right] \cdot \left[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x \right] \right\}$$

- **Primjer analitičkog određivanja vlastitih frekvencija i formi vibriranja**
- Geometrijske karakteristike konzolne grede:



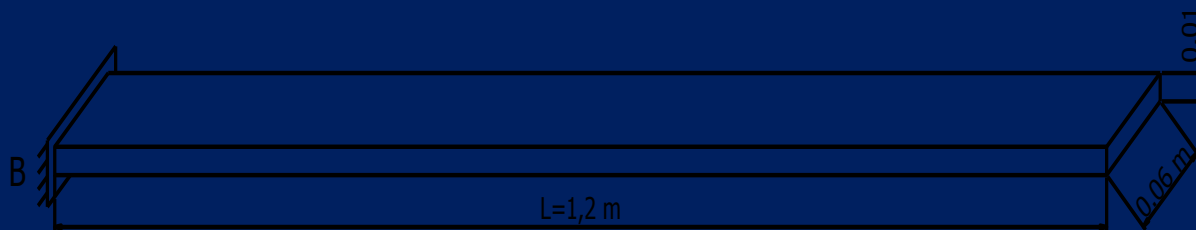
- Materijal: homogeni i izotropni čelik ($E= 210\text{ GPa}$, $\nu=0,3$, $\rho_{\check{c}}=7800\text{ kg/m}^3$)
- Specifična masa po jedinici duljine $\rho=4.8\text{ kg/m}$

- Forme vibriranja se dobiju u MATLAB-u



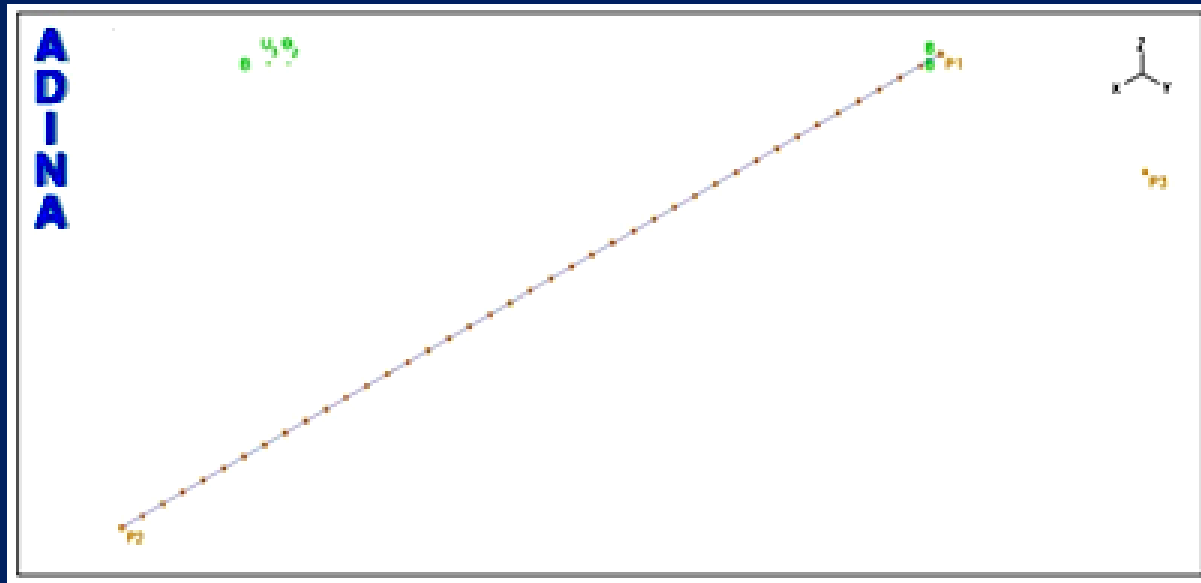
➤ 3. Određivanje slobodnih vibracija konzolne grede metodom konačnih elemenata

- Koriste se gredni, ravninski, pločasti i prostorni konačni elementi
- Analiza je rađena u programu "ADINA 8.3"
- Skica konzolne grede:



- Materijal: ($E= 210\text{ GPa}$, $\nu=0,3$, $\rho_{\check{c}}=7800\text{ kg/m}^3$)

- MODEL 1 (gredni elementi)



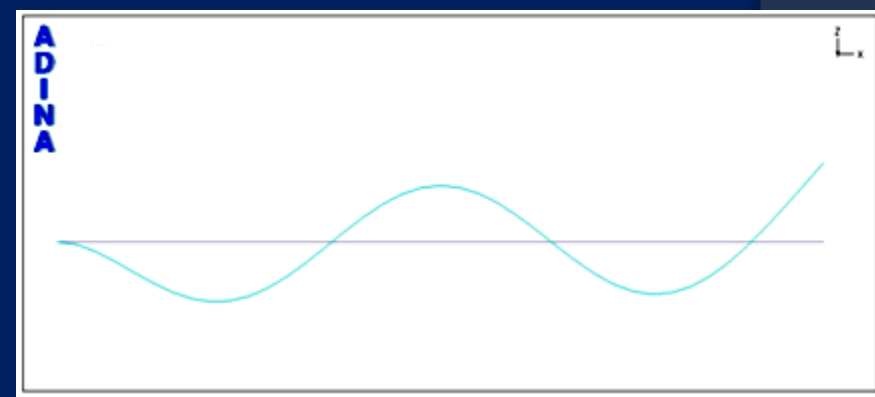
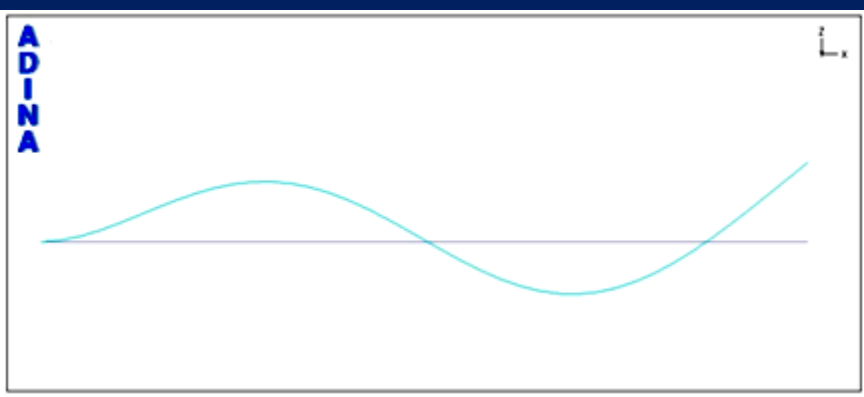
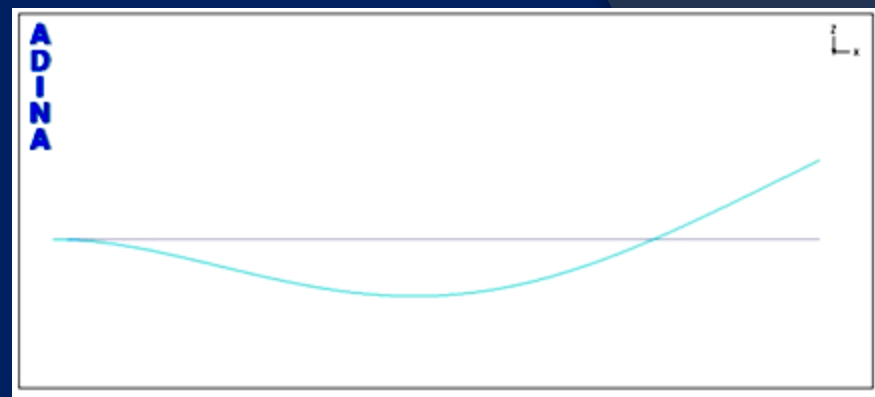
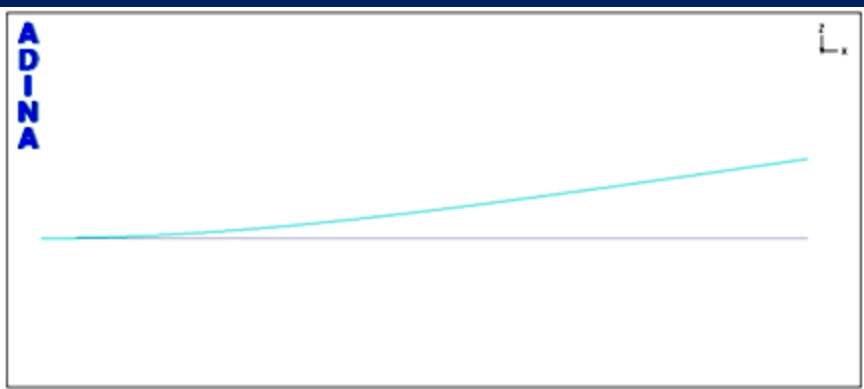
Broj čvorova: 41

Broj konačnih elemenata: 40

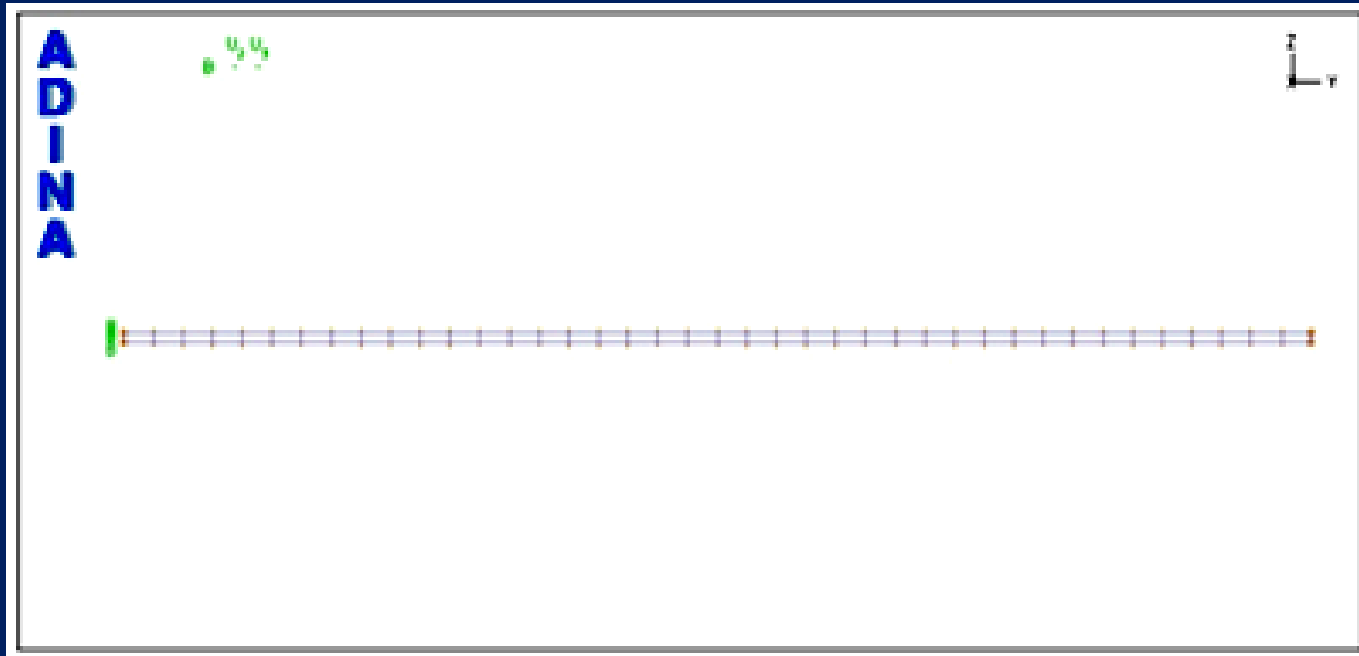
Tip konačnog elementa: gredni, linijski konačni element sa 2 čvora

Dozvoljeni pomaci u smjeru koordinatnih osi: z

Dozvoljeni zakreti oko koordinatnih osi: y



- MODEL 2 (2D SOLID elementi)

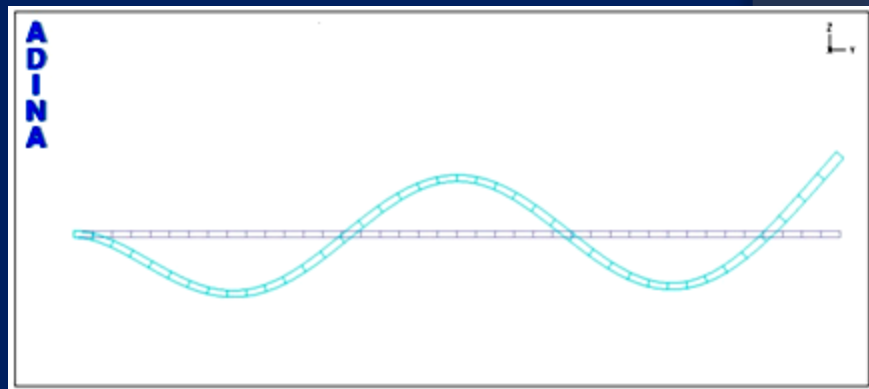
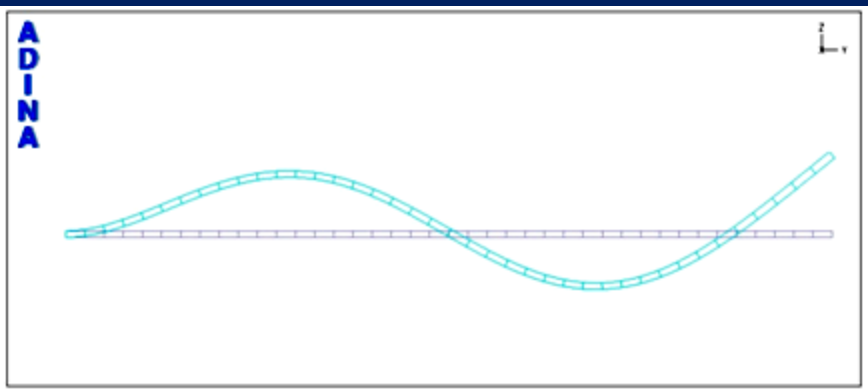
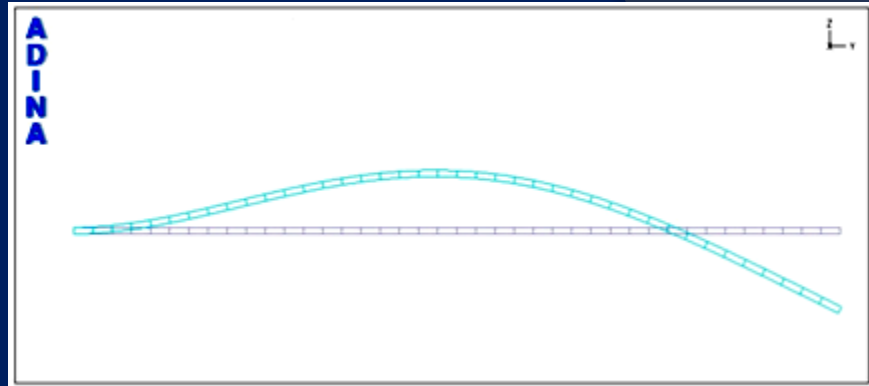
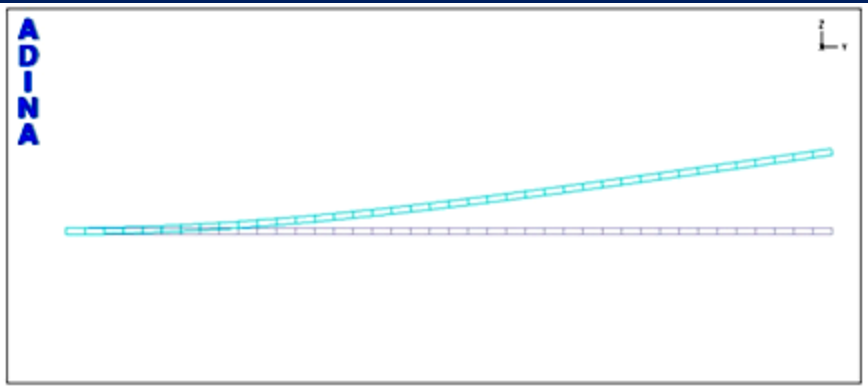


Broj čvorova: 243

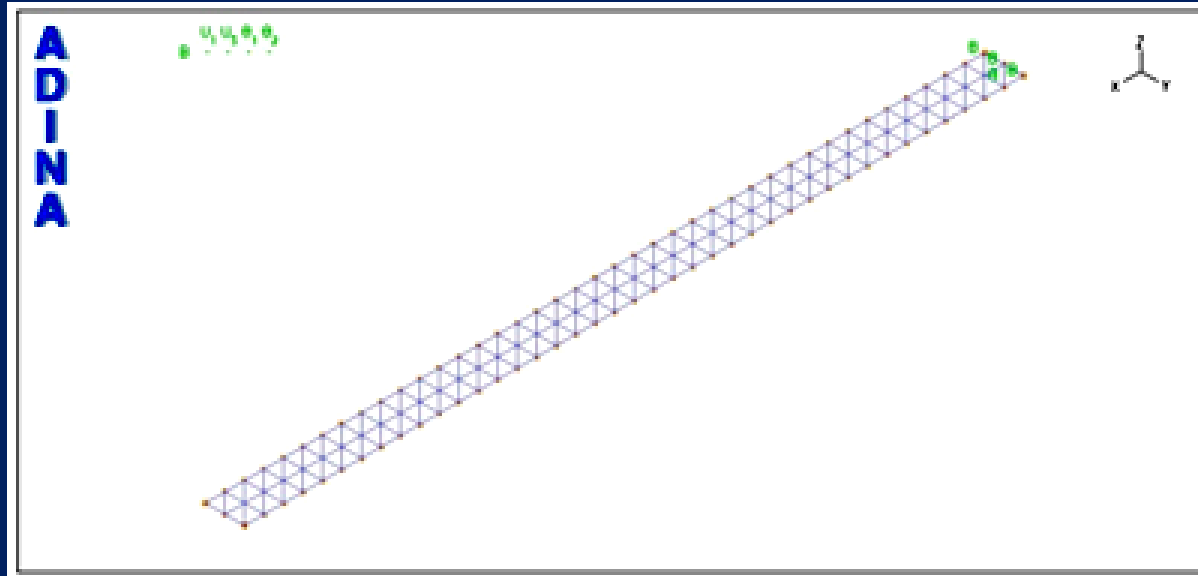
Broj konačnih elemenata: 40

Tip konačnog elementa: SOLID 2D, četvrtasti konačni element sa 9 čvorova

Dozvoljeni pomaci u smjeru koordinatnih osi: y i z



- MODEL 3 (pločasti elementi)



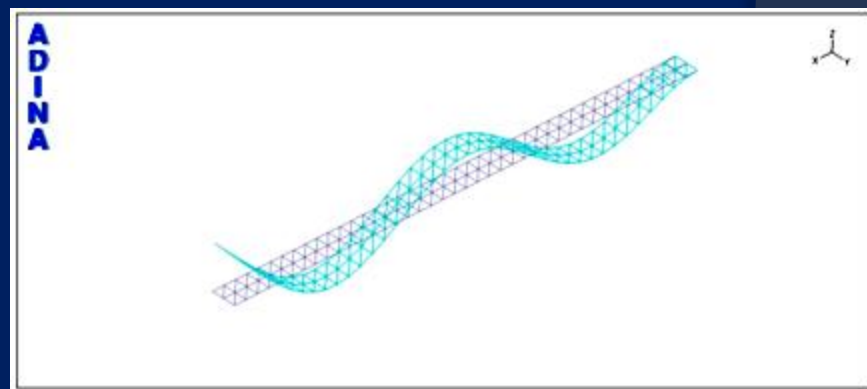
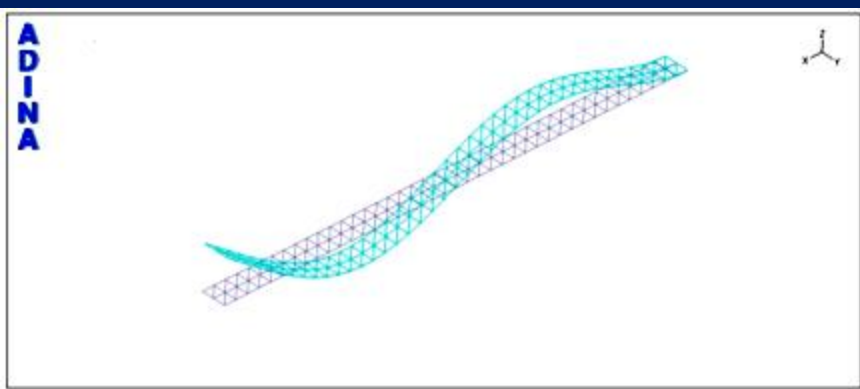
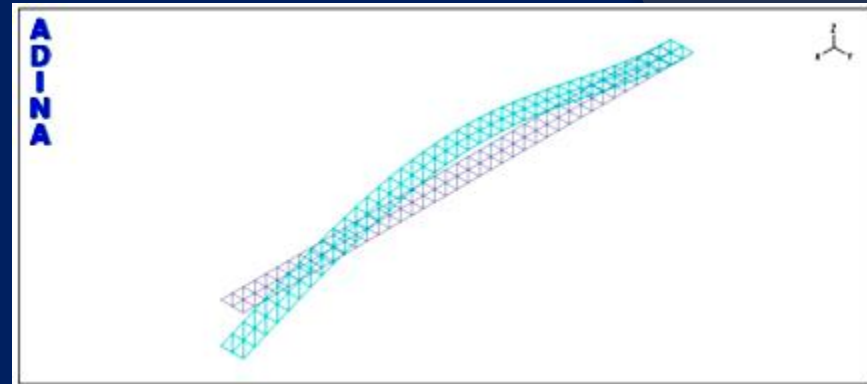
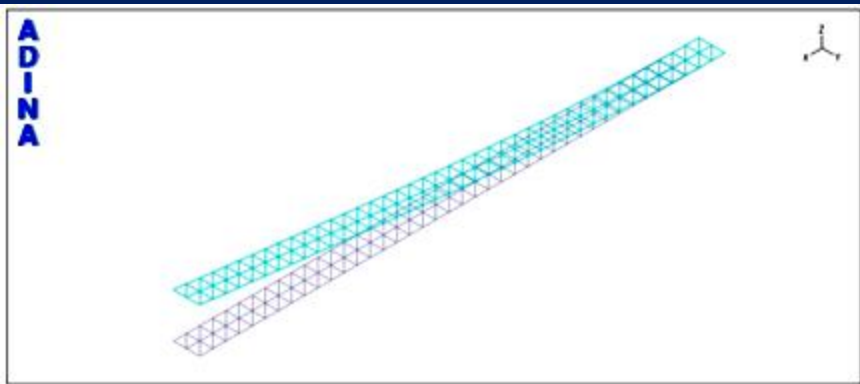
Broj čvorova: 123

Broj konačnih elemenata: 160

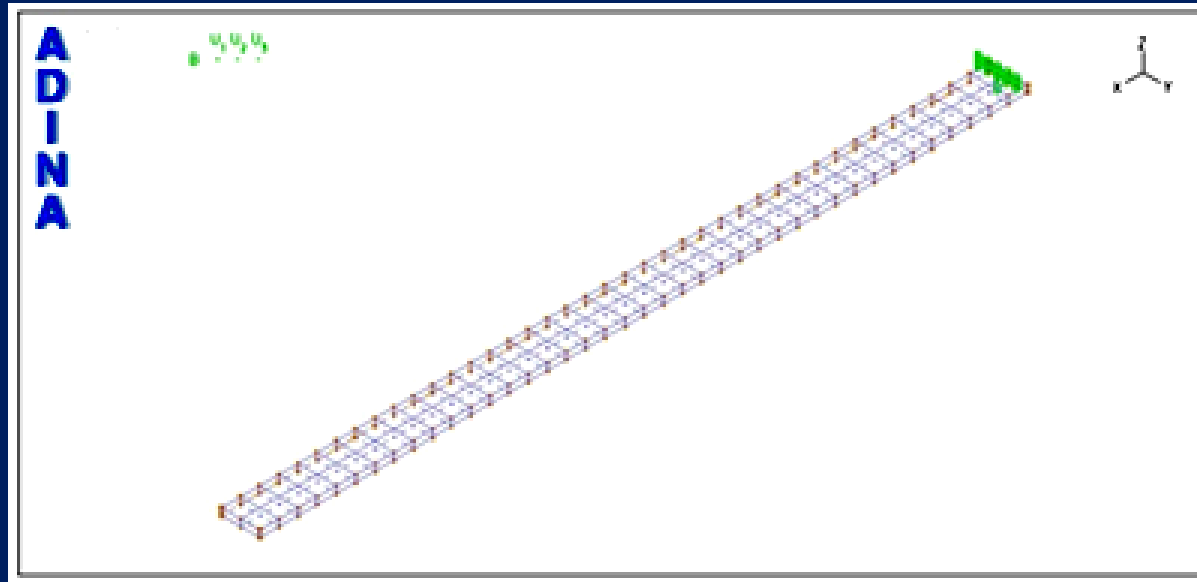
Tip konačnog elementa: pločasti konačni element sa 3 čvora

Dozvoljeni pomaci u smjeru koordinatnih osi: x, z

Dozvoljeni zakreti oko koordinatnih osi: x, y



- MODEL 4 (3D SOLID)

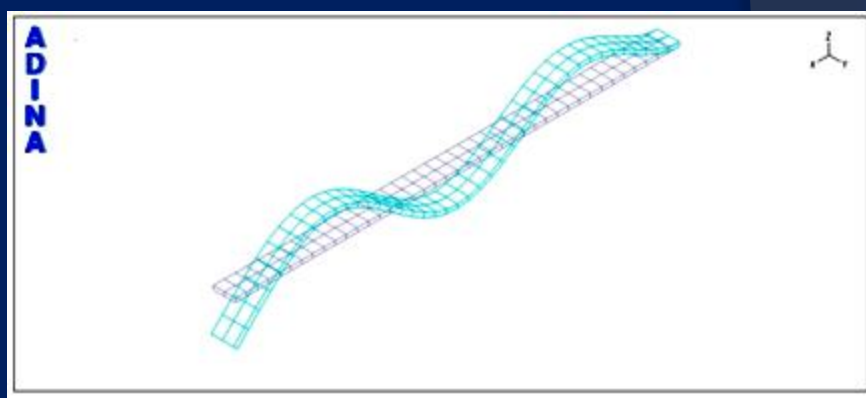
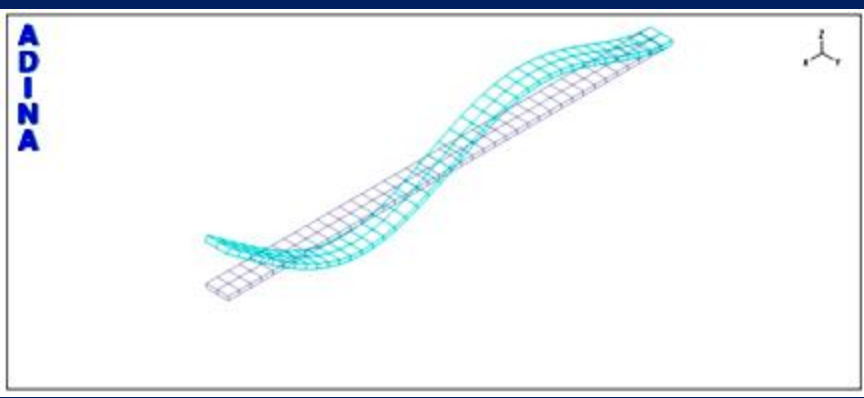
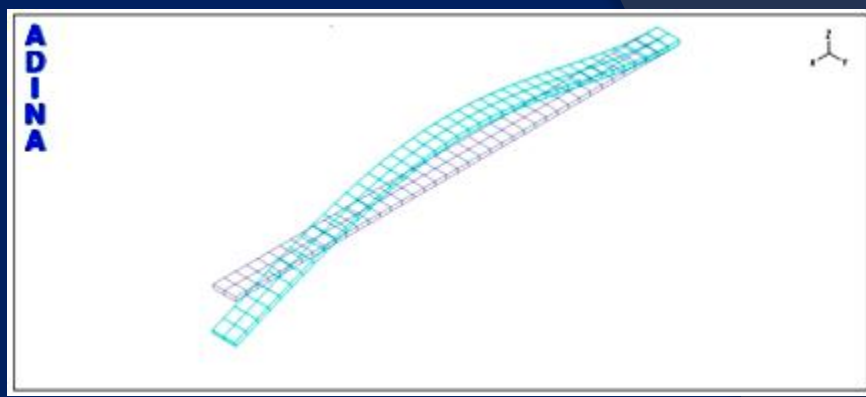
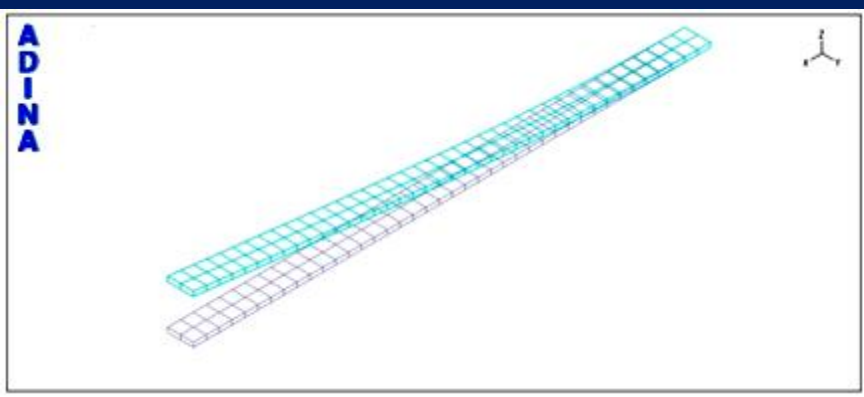


Broj čvorova: 1215

Broj konačnih elemenata: 80

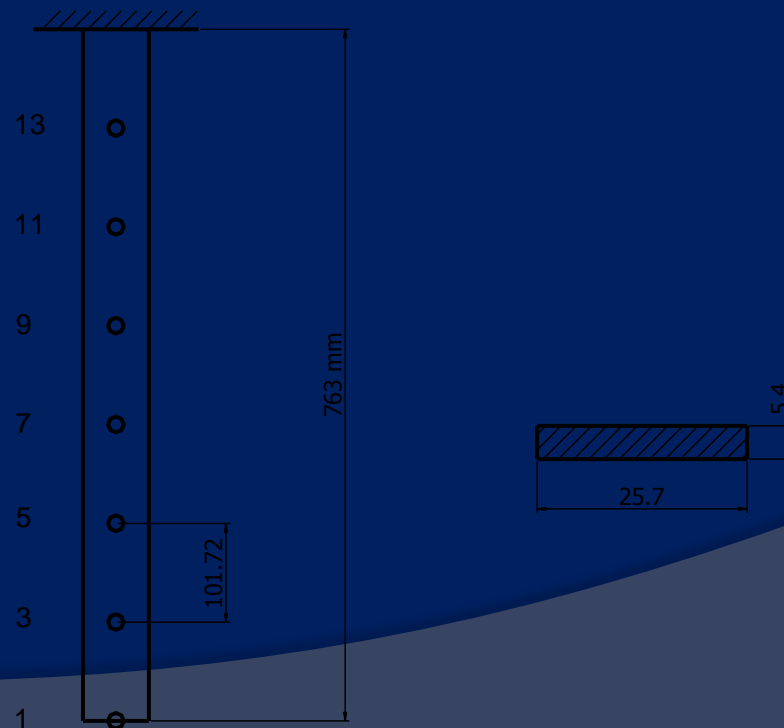
Tip konačnog elementa: 3D SOLID , prizmatični konačni element sa 27 čvorova

Dozvoljeni pomaci u smjeru koordinatnih osi: x , y i z



➤ 4. Eksperimentalno određivanje slobodnih vibracija konzolne grede

- Mjerenja vibracija konzolne grede su provedena u Laboratoriju za vibracije FESB-a.
- Dimenzije čelične grede i razmaci između čvorova su dani na slici :



- Oprema za mjerenje vibracija

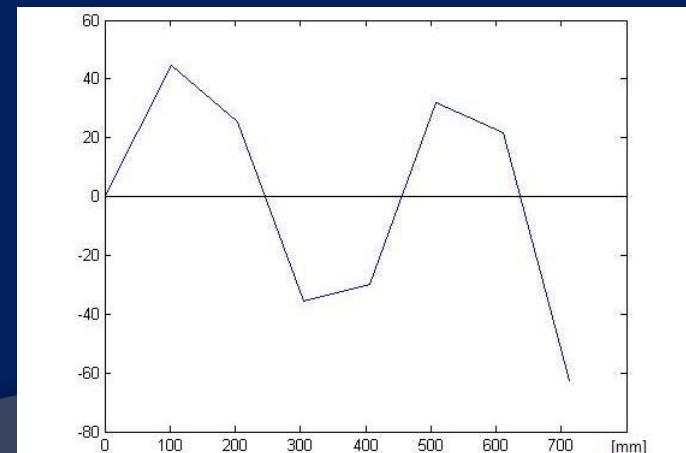
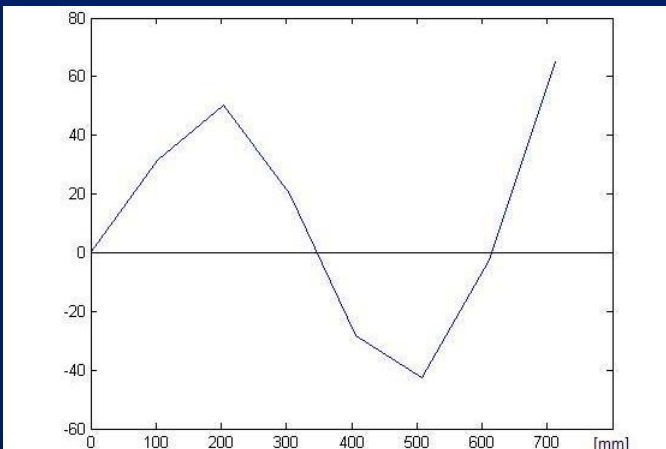
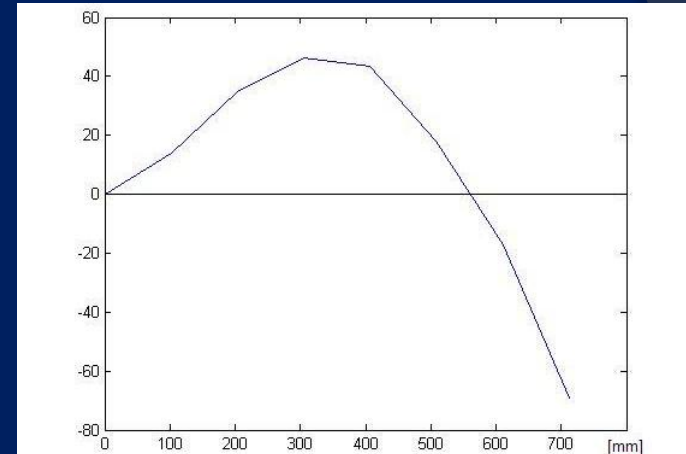
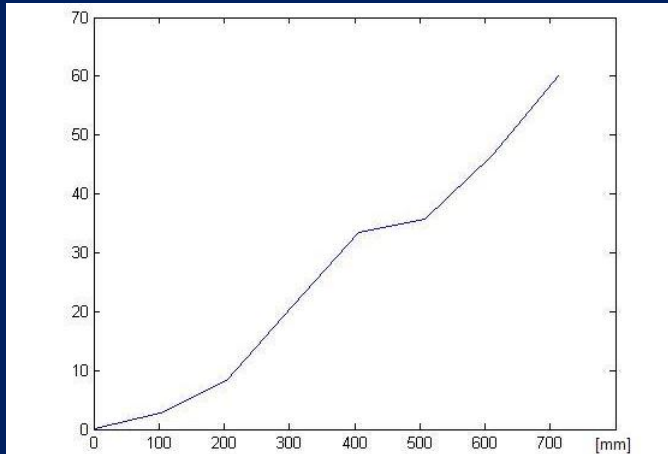


- Obrada rezultata mjerenja je izvršena u programu ME' Scope VES.

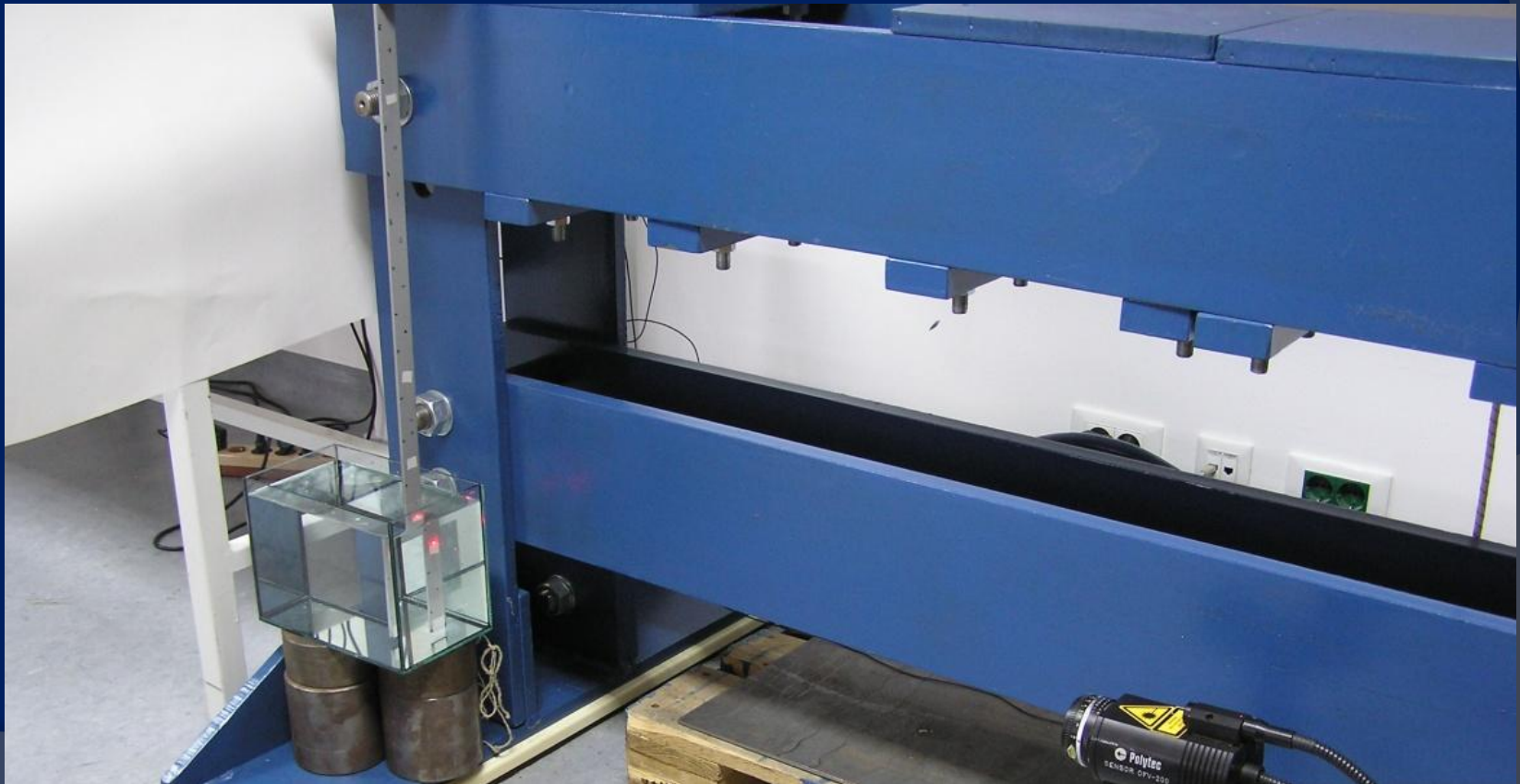
- Mjerenje slobodnih vibracija konzolne grede na suho



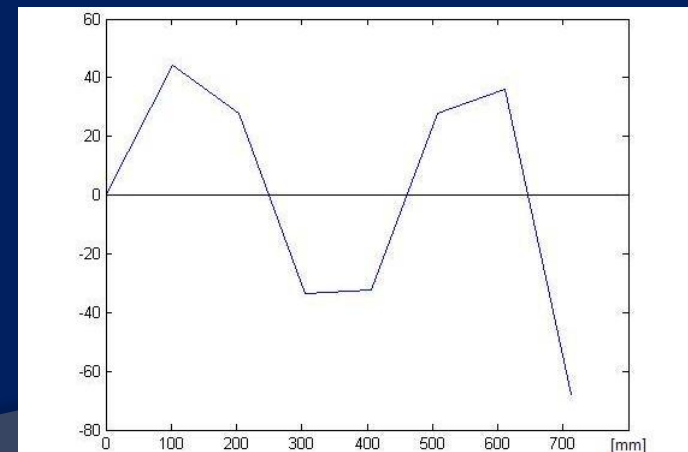
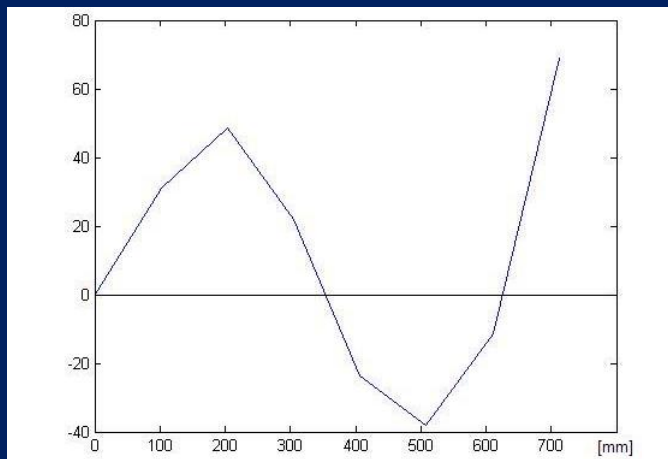
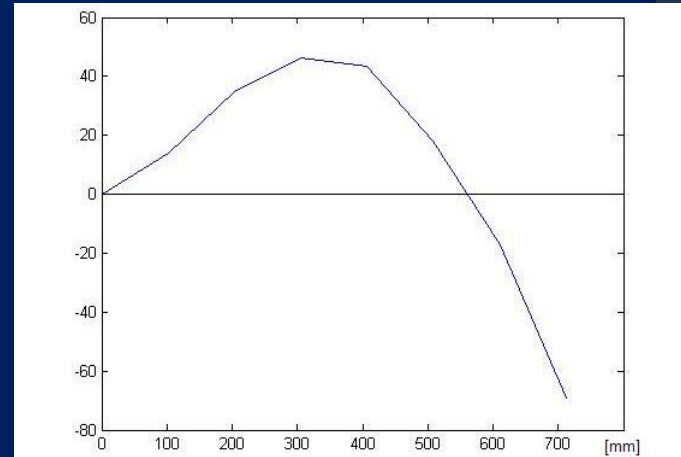
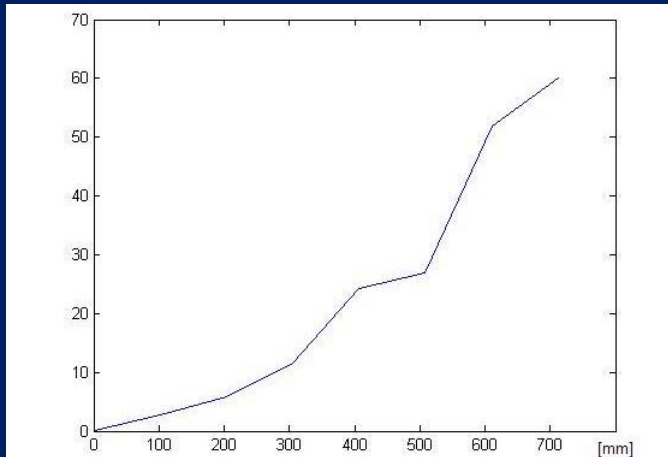
- Grafički prikaz eksperimentalno određenih formi vibriranja konzolne grede na suho



- Mjerenje slobodnih vibracija konzolne grede uronjene u vodu
- Mjerenje se izvodi na potpuno isti način, samo što je sada konzolna greda uronjena u vodu 152 mm . Voda se nalazi u staklenoj posudi da bi kroz stijenke posude mogla proći laserska zraka i izmjeriti brzinu točke 1.



- Grafički prikaz eksperimentalno određenih formi vibriranja konzolne grede u vodi



➤ 5. Usporedba rezultata

- Usporedba formi vibriranja različitih modela
- Kao referentno rješenje za određivanje najboljeg numeričkog modela uzeto je analitičko rješenje.
- Forme vibriranja su uspoređivane pomoću MAC-a (Modal Assurance Criterion).

$$MAC_{A,X} = \frac{|\psi_X^T \psi_A|^2}{\psi_X^T \psi_X \cdot \psi_A^T \psi_A}$$

- ψ_A i ψ_X su vektori formi vibriranja

- Kako su forme vibriranja svojstveni vektori morala bi vrijednost MAC-a za dvije iste forme dobivene analitički i numerički biti približno 1.0 , za dvije različite treba biti oko 0.0
- Prema ovom kriteriju (MAC-u) najbolje su se poklopile forme vibriranja numeričkog modela napravljenog od grednih elemenata sa analitički dobivenim formama.

Forma Greda	1	2	3	4
Analitički				
1	1.0000	0.1059	0.1179	0.1277
2	0.1054	1.0000	0.1304	0.1431
3	0.1177	0.1303	1.0000	0.1479
4	0.1278	0.1433	0.1482	1.0000

- Usporedba vrijednosti vlastitih frekvencija za različite modele
- Vrijednosti vlastitih frekvencija

Broj forme	Greda	2D SOLID	Ploča	3D SOLID	Analitički
1	3.65725E+01	3.65936E+01	3.67205E+01	3.67325E+01	36.56
2	2.29177E+02	2.29326E+02	2.30282E+02	2.30183E+02	229.18
3	6.41620E+02	6.42125E+02	6.46105E+02	6.44647E+02	641.80
4	1.25708E+03	1.25834E+03	1.27043E+03	1.26382E+03	1257.70

- Odstupanja vlastitih frekvencija različitih modela od analitički dobivenih vrijenosti

	Model 1:		Model 2:		Model 3:		Model 4:	
	Gredni model		Ravninski (2D) model		Ploča		Solid (3D) model	
Broj forme	[rad/s]	[%]	[rad/s]	[%]	[rad/s]	[%]	[rad/s]	[%]
1	0.01	0.0002	0.03	0.0008	0.16	0.004	0.17	0.0004
2	0.01	0.00004	0.14	0.0006	1.1	0.004	1	0.004
3	0.18	0.0002	0.32	0.00005	4.3	0.006	2.84	0.004
4	0.62	0.0004	0.64	0.0004	12.73	0.010	6.12	0.004

- Usporedba vlastitih frekvencija konzolne grede dobivenih na suho i kada je greda uronjena u vodu

Broj forme	Uronjena greda	Neuronjena greda	Razlika [rad/s]
1	44.61	51.71	7.1
2	305.42	32326	17.84
3	866.82	901.95	35.13
4	1674.65	1761.67	87.02

- Zbog utjecaja vode smanje se vrijednosti vlastitih frekvencija sa kojima greda vibrira

- Usporedba eksperimentalnih i numeričkih (gredni konačni element) rezultata iste grede sa analitičkim rješenjem
- Usporedba vlastitih frekvencija

Broj forme	1.Analitički	2.Numerički (gredni kon. element)	Razlika (2-1)	3.Izmjereno	Razlika (3-1)
1	48.85	48.85	0	51.71	2.86
2	306.18	306.16	0.02	323.26	17.08
3	857.39	857.93	0.54	901.95	44.56
4	1680.19	1685.47	5.28	1761.67	81.48

- MAC-ovi

Forma eks. / Analitički	1	2	3	4
1	0.8388	0.0003	0.0024	0.0119
2	0.2539	0.8026	0.1278	0.0085
3	0.2117	0.1765	0.2649	0.2880
4	0.0591	0.0000	0.0198	0.4035

Forma num. / Analitički	1	2	3	4
1	0.9057	0.2313	0.0641	0.0644
2	0.0105	0.8115	0.1183	0.1171
3	0.0081	0.0951	0.7214	0.0346
4	0.0264	0.0129	0.1815	0.7057

➤ 6. Zaključak

- ❑ U ovom radu su prikazane metode određivanja vlastitih frekvencija i formi vibriranja kontinuranog sustava pri slobodnim vibracijama. Kao primjer je uzeta konzolna greda.
- ❑ Pokazan je primjer mjerenja vlastitih frekvencija i formi vibriranja grede uronjenu u vodu i bez vode. Pokazalo se da su te vrijednosti nešto niže kada je greda uronjena u vodu.
- ❑ Pri numeričkoj analizi vibracija grede najpraktičnijim se pokazao gredni konačni element.
- ❑ Kod usporedbi rezultata dobivenih mjerenjem i numerički sa analitičkim vrijednostima dobilo se da numerički rezultati manje odstupaju od eksperimentalnih rezultata.